

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

PREMIER TEMPS DE PASSAGE DE PROCESSUS GAUSSIENS ET
MARKOVIENS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

SANDRA LARRIVÉE

NOVEMBRE 2012

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier mes directeurs, Francois Watier et Jean-Francois Renaud ainsi que les membres de mon comité d'évaluation, René Fernand et Mathieu Boudreault, pour leurs commentaires et encouragements pour la réalisation de ce projet. Je voudrais aussi remercier mes collègues étudiants au département de mathématiques de l'UQAM pour plusieurs commentaires et encouragements. J'ai grandement apprécié le support financier du Fonds Québécois de la Recherche sur la Nature et les Technologies (FQRNT) durant ma maîtrise. Finalement, je voudrais remercier ma famille pour leur support inconditionnel.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
RÉSUMÉ	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
RAPPELS	1
CHAPITRE II	
MÉTHODE DE DNPR	7
2.1 Premier temps de passage (via DNPR)	7
2.1.1 Mouvement brownien	10
2.1.2 Ornstein-Uhlenbeck	12
2.2 Propriétés de symétrie	18
CHAPITRE III	
EXEMPLES D'APPLICATIONS	31
3.1 Valeur d'une option à barrière	31
3.1.1 Densité du premier temps de passage	33
3.1.2 Calcul de la valeur de l'option	34
3.2 Gestion de portefeuille	39
3.2.1 Définition du problème	39
3.2.2 Calcul de la probabilité $P(\tau_\gamma(T) < T)$	41
CHAPITRE IV	
SIMULATIONS	43
4.1 Méthode DNPR	43
4.2 Méthode de Durbin	46
4.3 Comparaison des méthodes	48
CONCLUSION	51
APPENDICE A	

PROGRAMME MATLAB	53
A.1 Méthode DNPR	53
A.2 Méthode de Durbin	59
BIBLIOGRAPHIE	63

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
3.1 Prix d'un actif	32

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
4.1 Densité du premier temps de passage à la barrière $t + 1$ évaluée à $t = 1$	48
4.2 Densité du premier temps de passage à la barrière $11(1.02)^t$	49

RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur la densité du premier temps de passage d'un processus gaussien et markovien à travers une frontière. Ce problème est résolu pour quelques cas particuliers, mais il n'est pas encore possible pour l'instant de le résoudre de façon analytique pour une frontière déterministe quelconque. (Di Nardo et al., 2001) ont proposé une méthode qui utilise des fonctions symétriques pour un ensemble de frontières qui généralisent celles de (Daniels, 1996). C'est ce qui est principalement étudié ici. De plus, deux exemples d'applications en finance sont considérées. Finalement, on regarde aussi un exemple de simulations pour comparer cette méthode à celle de (Durbin et Williams, 1992).

Mots clés : Processus gaussien et markovien, mouvement brownien, processus d'Ornstein-Uhlenbeck, premier temps de passage.

INTRODUCTION

La théorie des processus stochastiques est un sujet important en probabilité. Elle permet de modéliser plusieurs phénomènes dans différents domaines. Par exemple, les processus stochastiques sont amplement utilisés en finance, en santé et en ingénierie.

Une fois qu'un phénomène est modélisé par un processus stochastique, il pourrait être pertinent de se demander à quel moment il va atteindre pour la première fois un certain état. C'est ce qu'on appelle le premier temps de passage. Bien sûr, il s'agit d'un événement aléatoire auquel est associée une probabilité. On s'intéresse alors à la densité de probabilité du premier temps de passage afin d'obtenir, par exemple, la probabilité d'un tel événement sur un horizon donné.

Ce sujet a été beaucoup étudié au cours des dernières décennies, en particulier dans le cas du mouvement brownien. La question est résolue pour quelques cas précis. On connaît par exemple la densité du premier temps de passage d'un mouvement brownien standard à travers une frontière affine. Par contre, si on s'intéresse à une classe plus large de processus stochastiques, comme les processus à la fois gaussiens et markoviens, le problème n'est pas résolu pour une frontière déterministe quelconque.

Ce mémoire porte principalement sur la méthode de Di Nardo, Nobile, Pirozzi et Ricciardi (DNPR) (Di Nardo et al., 2001) qui propose, dans un premier temps, une forme exacte de la densité du premier temps de passage pour les processus gaussiens et markoviens à une famille de frontières qui généralise les barrières de (Daniels, 1996).

Après avoir vu quelques rappels et définitions de base dans le chapitre 1, le chapitre 2 traite en détail de la méthode DNPR. Au chapitre 3, on retrouve deux exemples en finance où la méthode DNPR peut être utilisée. Finalement, au chapitre 4 des simulations sont effectuées afin de comparer les méthodes numériques de (Di Nardo et al.,

2001) et de (Durbin et Williams, 1992).

CHAPITRE I

RAPPELS

Pour commencer, introduisons quelques définitions en lien avec les processus à temps continus les plus répandus, soit le mouvement brownien (et de ses déclinaisons) et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ainsi que la notion de temps de passage. Enfin, quelques propriétés des processus gaussiens et markoviens sont présentées.

Définition 1.1. Un processus stochastique $\{W(t) : t \geq 0\}$ est un *mouvement brownien standard* s'il satisfait les propriétés suivantes :

1. $W(0) = 0$ presque sûrement ;
2. $W(t)$ est à accroissement aléatoire et stationnaire, $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$,
 $t > s > 0$;
3. pour tout $t > 0$, $W(t) \sim N(0, t)$.

Définition 1.2. Soit $\{W(t) : t \geq 0\}$, un mouvement brownien standard, alors $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$ est un *mouvement brownien avec dérive*, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Les paramètres μ et σ correspondent respectivement à la dérive et à la volatilité.

Définition 1.3. Un *mouvement brownien géométrique* est le processus aléatoire $\{X(t) : t \geq 0\}$ défini par

$$X(t) = X(0) \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right],$$

où $W(t)$ est un mouvement brownien standard.

Définition 1.4. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est le seul processus stochastique à être à la fois gaussien, markovien, stationnaire et continu en probabilité. Il satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX(t) = -\rho(X(t) - \mu)dt + \sigma dW(t),$$

où $W(t)$ est un mouvement brownien standard, $\mu \in \mathbb{R}$ est l'espérance asymptotique, $\sigma > 0$ est la volatilité et $\rho > 0$ représente la force de la réaction aux perturbations. Cette équation différentielle stochastique se résout assez facilement. Sa résolution permet d'écrire le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous la forme explicite suivante :

$$X(t) = X(0)e^{-\rho t} + \mu(1 - e^{-\rho t}) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\rho}}W(e^{2\rho t} - 1)e^{-\rho t}$$

Il possède les propriétés suivantes :

$$E(X(t)) = \mu,$$

$$\text{Cov}(X(s), X(t)) = \frac{\sigma^2}{2\rho}e^{-\rho|s-t|},$$

$$E(X(t)|X(0) = x_0) = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\rho t},$$

$$\text{Cov}(X(s), X(t)|X(0) = x_0) = \frac{\sigma^2}{2\rho}(e^{-\rho|s-t|} - e^{-\rho|s+t|}).$$

Définition 1.5. Le premier temps de passage d'un processus $\{X(t) : t \geq 0\}$ au niveau a est défini comme suit,

$$T_a = \inf\{t \geq t_0 : X(t) \geq a\},$$

si $X(t_0) < a$. Sinon,

$$T_a = \inf\{t \geq t_0 : X(t) \leq a\}.$$

Pour calculer $P(T_a \leq t)$ dans le cas où $X(t)$ est un mouvement brownien standard,

regardons le lien avec $P(W(t) > a)$, où $a > 0$.

$$\begin{aligned} P(W(t) > a) &= P(W(t) > a | T_a \leq t)P(T_a \leq t) + P(W(t) > a | T_a > t)P(T_a > t) \\ &= P(W(t) > a | T_a \leq t)P(T_a \leq t). \end{aligned}$$

Par symétrie, on peut voir que $P(W(t) > a | T_a \leq t) = 1/2$. En effet, sachant que le processus est passé par le point a entre 0 et t , la probabilité qu'il soit supérieur à a en t est égale à la probabilité qu'il soit inférieur à a . Donc,

$$\begin{aligned} P(T_a \leq t) &= 2P(W(t) > a) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}} dx. \end{aligned}$$

Donc, $T_a \sim IG(\infty, a^2)$ pour un mouvement brownien standard. Pour un mouvement brownien avec dérive, c'est plutôt, $T_a \sim IG\left(\frac{a}{\mu}, a^2\right)$.

Présentons maintenant la définition de la loi inverse gaussienne que l'on note IG .

Définition 1.6. $X \sim IG(\mu, \lambda)$ est une variable aléatoire inverse gaussienne si

$$P(X \leq x) = \int_0^x \left[\frac{\lambda}{2\pi y^3} \right]^{1/2} \exp\left(\frac{-\lambda(y - \mu)^2}{2\mu^2 y}\right) dy,$$

où $\mu, \lambda > 0$. De plus, cette loi a une espérance de μ et une variance de μ^3/λ .

Il n'est pas toujours possible de définir la densité du premier temps de passage aussi facilement. Par exemple, cela devient beaucoup plus compliqué lorsqu'il s'agit du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous reviendrons sur le calcul de ce cas particulier au chapitre 2.

Le mouvement brownien ainsi que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck partagent plusieurs propriétés au niveau de leur comportement dynamique dont certaines se retrouvent dans la définition suivante d'une famille générale de processus.

Définition 1.7. Un processus gaussien et markovien est un processus qui satisfait à la

fois les propriétés d'un processus de Gauss et d'un processus de Markov. Un processus gaussien et markovien $X(t)$ satisfait les trois propriétés suivantes :

- Si $h(t)$ est une fonction non nulle de t , alors $Z(t) = h(t)X(t)$ est aussi un processus gaussien et markovien.
- Si $f(t)$ est une fonction non décroissante de t , alors $Z(t) = X(f(t))$ est aussi un processus gaussien et markovien.
- Il existe une fonction $h(t)$ non nulle et une fonction $f(t)$ non décroissante tel que $X(t) = h(t)W(f(t))$, où $W(t)$ est un mouvement brownien standard.

Les processus gaussiens et markoviens peuvent être caractérisés par trois quantités :

- $m(t) := E[X(t)]$;
- $c(s, t) := E[(X(s) - m(s))(X(t) - m(t))] = \frac{c(s, u)c(u, t)}{c(u, u)} = h_1(s)h_2(t)$, où $s < u < t$;
- $r(t) = \frac{h_1(t)}{h_2(t)}$.

Tout processus gaussien et markovien à trajectoire continue peut être défini en fonction d'un mouvement brownien standard :

$$X(t) = m(t) + h_2(t)W(r(t))$$

où $W(\cdot)$ est un mouvement brownien standard (Di Nardo et al., 2001).

La densité de transition de $X(t)$, $f(x, t|y, \tau)$, pour $t > \tau$, est une loi normale avec

$$E[X(t)|X(\tau) = y] = m(t) + \frac{h_2(t)}{h_2(\tau)}[y - m(\tau)], \quad (1.1)$$

$$\text{Var}[X(t)|X(\tau) = y] = h_2(t) \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(\tau)} h_1(\tau) \right]. \quad (1.2)$$

Par exemple, pour un mouvement brownien standard, on a $m(t) = 0$, $h_1(t) = t$, $h_2(t) = 1$, donc $c(s, t) = s$ et $r(t) = t$. Finalement,

$$E[X(t)|X(\tau) = y] = y,$$

$$\text{Var}[X(t)|X(\tau) = y] = t - \tau.$$

Pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on a $m(t) = \mu + e^{-\rho t}(y - \mu)$, $h_1(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\rho}}(e^{\rho t} - e^{-\rho t})$, $h_2(t) = \frac{\sigma^2}{2\rho}e^{-\rho t}$, donc $c(s, t) = \frac{\sigma^2}{2\rho}(e^{-\rho(t-s)} - e^{-\rho(t+s)})$ et $r(t) = e^{2\rho t} - 1$. Finalement, pour $t > \tau$

$$E[X(t)|X(\tau) = y] = \mu + e^{-\rho(t-\tau)}(y - \mu),$$

$$\text{Var}[X(t)|X(\tau) = y] = \frac{\sigma^2}{2\rho}(1 - e^{-2\rho(t-\tau)}).$$

CHAPITRE II

MÉTHODE DE DNPR

Dans ce chapitre, nous allons voir deux méthodes pour obtenir la densité de probabilité du premier temps de passage. Avec la première méthode, nous allons obtenir une forme explicite lorsque la frontière à atteindre est de la forme $S(t) = m(t) + d_1 h_1(t) + d_2 h_2(t)$, où $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Avec la deuxième méthode, nous utiliserons des fonctions symétriques pour obtenir la densité du premier temps de passage lorsque la frontière à atteindre est une certaine généralisation des frontières de Daniels.

2.1 Premier temps de passage (via DNPR)

De façon un peu plus générale, on définit une barrière déterministique $S(t)$, qui varie dans le temps, continue et différentiable. On peut ensuite définir le premier temps de passage à cette frontière comme suit :

$$T_{S(\cdot)} = \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) > S(t)\},$$

où $X(t_0) = x_0 < S(t_0)$ et $X(t)$ est un processus gaussien et markovien. Puis, la densité de probabilité du premier temps de passage est

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} P(T_{S(\cdot)} \leq t).^1$$

1. La notation s'inspire fortement de l'article (Di Nardo et al., 2001) tout au long du mémoire.

Ensuite, on peut aussi définir la fonction de densité de probabilité avec contrainte que la frontière n'est pas atteinte avant t comme suit,

$$\alpha(x, t|x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial x} P(X(t) \leq x; X(\tau) < S(\tau), \forall \tau < t | X(t_0) = x_0),$$

pour $x_0 < S(t_0)$, $x < S(t)$, pour tout $t \geq t_0$. On a alors que

$$\int_{-\infty}^{S(t)} \alpha(x, t|x_0, t_0) dx = 1 - \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) d\tau,$$

pour $x_0 < S(t_0)$. On s'intéresse à trouver une forme générale pour la densité du premier temps de passage $g(S(t), t|x_0, t_0)$. Pour commencer, posons

$$\begin{aligned} F(S(t), t|x_0, t_0) &= P(X(t) \leq S(t) | X(t_0) = x_0), \\ f(S(t), t|x_0, t_0) &= \frac{\partial}{\partial S(t)} F(S(t), t|x_0, t_0), \\ \psi(S(t), t|x_0, t_0) &= \frac{\partial}{\partial t} F(S(t), t|x_0, t_0). \end{aligned}$$

On a que

$$\begin{aligned} P(X(t) > S(t) | X(t_0) = x_0) &= \int_{S(t)}^{\infty} f(y, t|x_0, t_0) dy \\ &= 1 - F(S(t), t|x_0, t_0) \end{aligned}$$

et, d'après (Fortet, 1943), on a aussi

$$P(X(t) > S(t) | X(t_0) = x_0) = \int_{t_0}^t \left[\int_{S(\tau)}^{\infty} f(y, t|S(\tau), \tau) dy \right] g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) d\tau.$$

Donc, en combinant,

$$\begin{aligned}
 1 - F(S(t), t|x_0, t_0) &= \int_{t_0}^t \left[\int_{S(t)}^{\infty} f(y, t|S(\tau), \tau) dy \right] g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) d\tau \\
 &= \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \int_{S(t)}^{\infty} f(y, t|S(\tau), \tau) dy d\tau \\
 &= \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) [1 - F(S(t), t|S(\tau), \tau)] d\tau \quad (2.1) \\
 &= \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) d\tau - \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) F(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

On a alors,

$$\int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) d\tau = 1 - F(S(t), t|x_0, t_0) + \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) F(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau \quad (2.2)$$

Maintenant, en dérivant de chaque côté par rapport à t , on obtient

$$\begin{aligned}
 g(S(t), t|x_0, t_0) &= -\psi(S(t), t|x_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) F(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau, \\
 &= -\psi(S(t), t|x_0, t_0) + \\
 &\quad g(S(t), t|x_0, t_0) \frac{1}{2} + \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \psi(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

et donc,

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = -2\psi(S(t), t|x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \psi(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau,$$

s'écrit sous la forme d'une équation intégrale de Volterra de 2e espèce. Posons,

$$\Psi(S(t), t|x_0, t_0) = \psi(S(t), t|x_0, t_0) + k(t)f(S(t), t|x_0, t_0) + r(t) [1 - F(S(t), t|x_0, t_0)],$$

où $k(t)$ et $r(t)$ sont des fonctions continues sur $[t_0, \infty)$ et où $x_0 < S(t_0)$. On a donc,

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = -2\Psi(S(t), t|x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau. \quad (2.3)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
& g(S(t), t|x_0, t_0) \\
&= -2\psi(S(t), t|x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \psi(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau \\
&= -2[\Psi(S(t), t|x_0, t_0) - k(t)f(S(t), t|x_0, t_0) - r(t)\{1 - F(S(t), t|x_0, t_0)\}] \\
&\quad + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \\
&\quad \times [\Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) - k(t)f(S(t), t|S(\tau), \tau) - r(t)\{1 - F(S(t), t|S(\tau), \tau)\}] d\tau \\
&= -2\Psi(S(t), t|x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau \\
&\quad + 2k(t) \left[f(S(t), t|x_0, t_0) - \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) f(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau \right] \\
&\quad + 2r(t) \left[\{1 - F(S(t), t|x_0, t_0)\} - \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \{1 - F(S(t), t|S(\tau), \tau)\} d\tau \right] \\
&= -2\Psi(S(t), t|x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau,
\end{aligned}$$

par (2.1) et sa dérivée par rapport à $S(t)$. Maintenant qu'on a la forme générale (2.3) pour $g(S(t), t|x_0, t_0)$, la densité du premier temps de passage, nous allons effectuer quelques calculs pour obtenir des résultats explicites pour deux cas particuliers, en commençant par le cas du mouvement brownien.

2.1.1 Mouvement brownien

D'abord, on sait que les fonctions de densité et de répartition d'un mouvement brownien au point $S(t)$ étant donné $W(t_0) = x_0$ sont les suivantes :

$$f(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(S(t) - x_0)^2}{(t-t_0)}\right)$$

et

$$F(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{S(t) - x_0}{\sqrt{2(t-t_0)}} \right) \right].$$

Erf est la fonction d'erreur définie comme suit : $\text{Erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-t^2} dt$. Posons $z = \frac{S(t)-x_0}{\sqrt{2(t-t_0)}}$, donc $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{S'(t)}{\sqrt{2(t-t_0)}} - \frac{S(t)-x_0}{(2(t-t_0))^{3/2}}$. Alors,

$$\begin{aligned} \psi(S(t), t|x_0, t_0) &= \frac{\partial F(S(t), t|x_0, t_0)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \left[\frac{S'(t)}{\sqrt{2(t-t_0)}} - \frac{S(t)-x_0}{(2(t-t_0))^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t-t_0}} e^{-z^2} \left[S'(t) - \frac{S(t)-x_0}{2(t-t_0)} \right] \\ &= f(S(t), t|x_0, t_0) \left[S'(t) - \frac{S(t)-x_0}{2(t-t_0)} \right]. \end{aligned}$$

On a donc,

$$\Psi(S(t), t|x_0, t_0) = f(S(t), t|x_0, t_0) \left[k(t) + S'(t) - \frac{S(t)-x_0}{2(t-t_0)} \right] + r(t) [1 - F(S(t), t|x_0, t_0)].$$

Cette équation ne peut pas facilement être résolue dans un cas général. Par contre, si $S(t)$ est une fonction affine, et si on prend $r(t) = 0$ ainsi que $k(t) = -\frac{S'(t)}{2}$, alors $\Psi(S(t), t|x_0, t_0) = 0$. Dans ce cas, on obtient facilement une solution,

$$\begin{aligned} g(S(t), t|x_0, t_0) &= -2\Psi(S(t), t|x_0, t_0) \\ &= -2f(S(t), t|x_0, t_0) \frac{1}{2} \left[S'(t) - \frac{S(t)-x_0}{(t-t_0)} \right] \\ &= -f(S(t), t|x_0, t_0) \left[a - \frac{at+b-x_0}{(t-t_0)} \right] \\ &= -f(S(t), t|x_0, t_0) \left[\frac{-at_0-b+x_0}{(t-t_0)} \right] \\ &= \left[\frac{at_0+b-x_0}{(t-t_0)} \right] f(S(t), t|x_0, t_0) \\ &= \left[\frac{at_0+b-x_0}{(t-t_0)} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t-t_0}} \exp \left(-\frac{(S(t)-x_0)^2}{2(t-t_0)} \right) \\ &= \frac{at_0+b-x_0}{\sqrt{2\pi}(t-t_0)^{3/2}} \exp \left(-\frac{(at+b-x_0)^2}{2(t-t_0)} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

On voit que si $a = 0$, on retrouve la densité de la loi inverse-gaussienne avec paramètres $\mu = \infty$ et $\lambda = (b - x_0)^2$. Par contre, si l'on s'intéresse à un premier temps de passage à une frontière qui n'est pas affine, on réalise que le problème devient beaucoup plus complexe.

La méthode que l'on vient de considérer permet tout de même de résoudre le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour un certain type de frontière. C'est ce que l'on va regarder dans la prochaine sous-section.

2.1.2 Ornstein-Uhlenbeck

Maintenant, pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck,

$$E(X(t)|X(t_0) = x_0) = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}$$

et

$$\text{Var}(X(t)|X(t_0) = x_0) = \frac{\sigma^2}{2\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)}).$$

Puis, on sait que c'est un processus gaussien, donc

$$f(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{[S(t) - \mu - (x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}]^2}{\frac{\sigma^2}{2\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})}\right)$$

et

$$F(S(t), t|x_0, t_0) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{Erf} \left(\frac{S(t) - \mu - (x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})}} \right) \right].$$

Posons

$$z = \frac{S(t) - \mu - (x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})}},$$

afin de calculer $\psi(S(t), t|x_0, t_0)$, alors

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{S'(t) + \rho(x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})}} - \frac{[S(t) - \mu - (x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}]\sigma^2 e^{-2\rho(t-t_0)}}{\left(\frac{\sigma^2}{\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})\right)^{3/2}}.$$

$$\begin{aligned}
\psi(S(t), t|x_0, t_0) &= \frac{\partial}{\partial t} F(S(t), t|x_0, t_0) \\
&= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \left[\frac{S'(t) + \rho(x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{[S(t) - \mu - (x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}]\sigma^2 e^{-2\rho(t-t_0)}}{\left(\frac{\sigma^2}{\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})\right)^{3/2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})}} e^{-z^2} \left[S'(t) + \rho(x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{[S(t) - \mu - (x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}]\sigma^2 e^{-2\rho(t-t_0)}}{\left(\frac{\sigma^2}{\rho}(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})\right)} \right] \\
&= f(S(t), t|x_0, t_0) \left[S'(t) + \rho(x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\rho[S(t) - \mu - (x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}]e^{-2\rho(t-t_0)}}{(1 - e^{-2\rho(t-t_0)})} \right] \\
&= f(S(t), t|x_0, t_0) \left[S'(t) + \frac{\rho(x_0 - \mu)e^{-\rho(t-t_0)}}{1 - e^{-2\rho(t-t_0)}} - \frac{\rho(S(t) - \mu)}{e^{2\rho(t-t_0)} - 1} \right] \\
&= f(S(t), t|x_0, t_0) \left[S'(t) + \rho(S(t) - \mu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho e^{\rho(t-t_0)}}{1 - e^{2\rho(t-t_0)}} \left[(S(t) - \mu)e^{\rho(t-t_0)} - (x_0 - \mu) \right] \right].
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\Psi(S(t), t|x_0, t_0) &= f(S(t), t|x_0, t_0) [S'(t) + \rho(S(t) - \mu) + \\
&\quad \frac{\rho e^{\rho(t-t_0)}}{1 - e^{2\rho(t-t_0)}} [(S(t) - \mu)e^{\rho(t-t_0)} - (x_0 - \mu)] + k(t)] \\
&\quad + r(t)F(S(t), t|x_0, t_0).
\end{aligned}$$

Théorème 2.1. Pour un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, soit $S(t)$ une frontière de classe $C^2[t_0, \infty)$. Alors, $\lim_{\tau \rightarrow t} \Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) = 0$ et $\Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) = 0 \forall \tau : t_0 \leq \tau < t$ si et seulement si $S(t) = \mu + Ae^{-\rho t} + Be^{\rho t}$, $k(t) = -B\rho e^{\rho t}$ et $r(t) = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nécessité.

Posons

$$H(t, \tau, S(\tau)) = S'(t) + \rho(S(t) - \mu) + \frac{\rho e^{\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \left[(S(t) - \mu)e^{\rho(t-\tau)} - (S(\tau) - \mu) \right] + k(t).$$

Comme $f(S(t), t|S(\tau), \tau)$ diverge lorsque $\tau \rightarrow t$, on doit d'abord avoir que $H(t, \tau, S(\tau))$ tend vers 0 lorsque $\tau \rightarrow t$, car $\lim_{\tau \rightarrow t} \Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) = 0$ par hypothèse. Calculons cette limite :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow t} H(t, \tau, S(\tau)) &= S'(t) + \rho(S(t) - \mu) \\ &\quad + k(t) + \lim_{\tau \rightarrow t} \left\{ \frac{\rho e^{\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \left[(S(t) - \mu)e^{\rho(t-\tau)} - (S(\tau) - \mu) \right] \right\} \\ &= S'(t) + \rho(S(t) - \mu) + k(t) \\ &\quad + \rho \lim_{\tau \rightarrow t} \left\{ \frac{1}{e^{-\rho(t-\tau)} - e^{\rho(t-\tau)}} \left[(S(t) - \mu)e^{\rho(t-\tau)} - (S(\tau) - \mu) \right] \right\} \\ &= S'(t) + \rho(S(t) - \mu) + k(t) + \rho \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

Pour lever l'indétermination, utilisons la règle de l'Hospital :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow t} H(t, \tau, S(\tau)) &= S'(t) + \rho(S(t) - \mu) + k(t) + \rho \frac{S'(t)e^{\rho(t-\tau)} + (S(t) - \mu)\rho e^{\rho(t-\tau)}}{-\rho e^{-\rho(t-\tau)} - \rho e^{\rho(t-\tau)}} \Big|_{t=\tau} \\ &= S'(t) + \rho(S(t) - \mu) + k(t) + \frac{S'(t)e^{\rho(t-t)} + \rho(S(t) - \mu)e^{\rho(t-t)}}{-e^{-\rho(t-t)} - e^{\rho(t-t)}} \\ &= S'(t) + \rho(S(t) - \mu) + k(t) + \frac{S'(t) + \rho(S(t) - \mu)}{-2} \\ &= k(t) + \frac{S'(t) + \rho(S(t) - \mu)}{2}. \end{aligned}$$

Comme il faut que $\lim_{\tau \rightarrow t} H(t, \tau, S(\tau)) = 0$, on doit avoir $k(t) = \frac{-S'(t) - \rho(S(t) - \mu)}{2}$. Par conséquent,

$$H(t, \tau, S(\tau)) = \frac{S'(t) + \rho(S(t) - \mu)}{2} + \frac{\rho e^{\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \left[(S(t) - \mu)e^{\rho(t-\tau)} - (S(\tau) - \mu) \right]$$

et, encore avec la règle de l'Hospital, on peut voir que

$$\lim_{\tau \rightarrow t} f(t, \tau, S(\tau))H(t, \tau, S(\tau)) = 0.$$

De plus, puisque

$$\lim_{\tau \rightarrow t} r(t)F(S(t), t|S(\tau), \tau) = \frac{r(t)}{2},$$

on doit donc aussi avoir $r(t) = 0$. Finalement, pour trouver $S(t)$, il faut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$S'(t) + \rho(S(t) - \mu) + \frac{2\rho e^{\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} [(S(t) - \mu)e^{\rho(t-\tau)} - (S(\tau) - \mu)] = 0,$$

soit encore

$$S'(t) + S(t) \left[\rho + \frac{2\rho e^{2\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \right] = C.$$

Puisque l'équation est linéaire, on va d'abord résoudre le cas où $C = 0$. Alors, la solution pour ce cas est

$$S(t) = Ae^{-\int f(t)dt},$$

où $f = \rho + \frac{2\rho e^{2\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}}$ et A est une constante arbitraire. Mais

$$\begin{aligned} \int f(t)dt &= \rho t + 2\rho \int \frac{1}{e^{-2\rho(t-\tau)} - 1} dt \\ &= \rho t - [\ln(e^{-2\rho(t-\tau)} - 1) + 2\rho(t - \tau)] \\ &= \rho t - \ln(e^{-2\rho(t-\tau)} - 1) - 2\rho(t - \tau), \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
 S(t) &= A[e^{-\rho t}(e^{-2\rho(t-\tau)} - 1)e^{2\rho(t-\tau)}] \\
 &= A[e^{-\rho t}(1 - e^{2\rho(t-\tau)})] \\
 &= A[e^{-\rho t} - e^{\rho t}e^{-2\rho\tau}] \\
 &= Ae^{-\rho t} + Be^{\rho t}.
 \end{aligned}$$

Puis, clairement, $S(t) = \mu$ est une solution particulière, donc $S(t) = \mu + Ae^{-\rho t} + Be^{\rho t}$.

Finalement,

$$\begin{aligned}
 k(t) &= \frac{-S'(t) - \rho(S(t) - \mu)}{2} \\
 &= \frac{-(-A\rho e^{-\rho t} + B\rho e^{\rho t}) - \rho(Ae^{-\rho t} + Be^{\rho t})}{2} \\
 &= -B\rho e^{\rho t}.
 \end{aligned}$$

Suffisance.

En partant avec les hypothèses suivantes, $S(t) = \mu + Ae^{-\rho t} + Be^{\rho t}$, $k(t) = -B\rho e^{\rho t}$ et $r(t) = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
H(t, \tau, S(\tau)) &= S'(t) + \rho(S(t) - \mu) \\
&\quad + \frac{\rho e^{\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \left[(S(t) - \mu)e^{\rho(t-\tau)} - (S(\tau) - \mu) \right] + k(t) \\
&= (-A\rho e^{-\rho t} + B\rho e^{\rho t}) + \rho(Ae^{-\rho t} + Be^{\rho t}) \\
&\quad + \frac{\rho e^{\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \left[(Ae^{-\rho t} + Be^{\rho t})e^{\rho(t-\tau)} - (Ae^{-\rho \tau} + Be^{\rho \tau}) \right] - B\rho e^{\rho t} \\
&= 2B\rho e^{\rho t} \\
&\quad + \frac{\rho e^{\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \left[Ae^{-\rho \tau} + Be^{\rho t} e^{\rho(t-\tau)} - (Ae^{-\rho \tau} + Be^{\rho \tau}) \right] - B\rho e^{\rho t} \\
&= B\rho e^{\rho t} + \frac{\rho e^{\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \left[Be^{\rho t} e^{\rho(t-\tau)} - Be^{\rho \tau} \right] \\
&= B\rho e^{\rho t} + \frac{B\rho e^{\rho t} e^{2\rho(t-\tau)} - B\rho e^{\rho \tau} e^{\rho(t-\tau)}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \\
&= B\rho e^{\rho t} + \frac{B\rho e^{\rho t} e^{2\rho(t-\tau)} - B\rho e^{\rho t}}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \\
&= B\rho e^{\rho t} + \frac{B\rho e^{\rho t} [e^{2\rho(t-\tau)} - 1]}{1 - e^{2\rho(t-\tau)}} \\
&= B\rho e^{\rho t} - B\rho e^{\rho t} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) = f(S(t), t|S(\tau), \tau) \times 0 + r(t)F(S(t), t|S(\tau), \tau) = 0,$$

car $r(t) = 0$.

□

On peut maintenant trouver la densité g lorsque $S(t) = \mu + Ae^{-\rho t} + Be^{\rho t}$, $k(t) = -B\rho e^{\rho t}$ et $r(t) = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 g(S(t), t|x_0, t_0) &= -2\Psi(S(t), t|x_0, t_0) \\
 &= -2 \left[f(S(t), t|x_0, t_0) \times \left(\frac{S'(t) + \rho(S(t) - \mu)}{2} + \frac{\rho e^{\rho(t-t_0)}}{1 - e^{2\rho(t-t_0)}} \left[(S(t) - \mu)e^{\rho(t-t_0)} - (x_0 - \mu) \right] \right) \right] \\
 &= -2 \left[f(S(t), t|x_0, t_0) \times \left(\frac{-A\rho e^{-\rho t} + B\rho e^{\rho t} + \rho(Ae^{-\rho t} + Be^{\rho t})}{2} + \frac{\rho e^{\rho(t-t_0)}}{1 - e^{2\rho(t-t_0)}} \left[(Ae^{-\rho t} + Be^{\rho t})e^{\rho(t-t_0)} - (x_0 - \mu) \right] \right) \right] \\
 &= -2 \left[f(S(t), t|x_0, t_0) \times \left(B\rho e^{\rho t} + \frac{\rho}{e^{-\rho(t-t_0)} - e^{\rho(t-t_0)}} \left[Ae^{-\rho t_0} + Be^{\rho t_0}e^{\rho(t-t_0)} - (x_0 - \mu) \right] \right) \right] \\
 &= -2 \left[f(S(t), t|x_0, t_0) \times \rho \left(\frac{Be^{\rho t}e^{-\rho(t-t_0)} - Be^{\rho t}e^{\rho(t-t_0)}}{e^{-\rho(t-t_0)} - e^{\rho(t-t_0)}} + \frac{Ae^{-\rho t_0} + Be^{\rho t_0}e^{\rho(t-t_0)} - (x_0 - \mu)}{e^{-\rho(t-t_0)} - e^{\rho(t-t_0)}} \right) \right] \\
 &= -2\rho f(S(t), t|x_0, t_0) \times \left(\frac{Be^{\rho t_0} + Ae^{-\rho t_0} - (x_0 - \mu)}{e^{-\rho(t-t_0)} - e^{\rho(t-t_0)}} \right).
 \end{aligned}$$

Dans le cas où $S(t) = \mu$, la densité se simplifie comme suit :

$$g(\mu, t|x_0, t_0) = -2\rho f(\mu, t|x_0, t_0) \times \left(\frac{\mu - x_0}{e^{-\rho(t-t_0)} - e^{\rho(t-t_0)}} \right).$$

Encore une fois, dans le cas où la frontière a une autre forme que celle énoncée dans le théorème précédent, une solution analytique est moins évidente. La méthode proposée dans la prochaine section permet cependant de résoudre quelques autres cas particuliers.

2.2 Propriétés de symétrie

Maintenant, nous allons voir une méthode qui utilise des propriétés de symétrie pour trouver la densité du premier temps de passage. Pour ce faire, définissons quelques

propriétés de symétrie.

Lemme 2.1. *Soit $X(t)$, un processus gaussien et markovien avec (1.1) et (1.2) comme espérance et variance conditionnelle respectivement. On pose*

$$\phi(x, t) = \exp \left(-\frac{2d_1^*(x - u(t))}{h_2(t)} \right),$$

$$y(t) = m(t) + d_1 h_1(t) + d_2 h_2(t),$$

$$u(t) = m(t) + d_1^* h_1(t) + d_2^* h_2(t),$$

$$\psi(x, t) = 2u(t) - x,$$

où $d_1, d_2, d_1^*, d_2^* \in \mathbb{R}$. $u(t)$ est appelé la courbe de symétrie par rapport à la fonction de symétrie $\psi(x, t)$. La courbe de symétrie $y(t) < u(t)$. Alors,

$$f(x, t|x_0, t_0) = \frac{\phi(x, t)}{\phi(x_0, t_0)} f(\psi(x, t), t|\psi(x_0, t_0), t_0) \quad (2.5)$$

et

$$\phi(x, t) f(\psi(x, t), t|x_0, t_0) = f(x, t|x_0, t_0) \exp \left(-\frac{2[x - u(t)][x_0 - u(t_0)]}{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)} \right). \quad (2.6)$$

Démonstration. Commençons par démontrer (2.5). D'abord, on pose

$$V(t) := \text{Var}(X(t)|X(t_0) = a) = h_2(t) \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} h_1(t_0) \right],$$

où $a \in \mathbb{R}$, afin de simplifier l'écriture.

Pour commencer, développons $f(\psi(x, t), t | \psi(x_0, t_0), t_0)$.

$$\begin{aligned} f(\psi(x, t), t | \psi(x_0, t_0), t_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp \left[-\frac{1}{2V(t)} \times \right. \\ &\quad \left. \left(2u(t) - x - m(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} (2u(t_0) - x_0 - m(t_0)) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp \left[-\frac{1}{2V(t)} \times \right. \\ &\quad \left(2 \left[u(t) - x - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} (u(t_0) - x_0) \right] \right. \\ &\quad \left. \left. + x - m(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} (x_0 - m(t_0)) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp \left[-\frac{1}{2V(t)} \times \right. \\ &\quad \left(4 \left[u(t) - x - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} (u(t_0) - x_0) \right]^2 \right. \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\left. + \left[x - m(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} (x_0 - m(t_0)) \right]^2 \right) \quad (2.7b)$$

$$\left. + 4 \left[u(t) - x - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} (u(t_0) - x_0) \right] \times \right. \\ \left. \left[x - m(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} (x_0 - m(t_0)) \right] \right) \quad (2.7c)$$

En remplaçant $u(t)$ par $m(t) + d_1^* h_1(t) + d_2^* h_2(t)$ et en posant $k(t, t_0) = x - m(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} (x_0 - m(t_0))$, (2.7a) peut s'écrire comme suit :

$$4k(t, t_0)^2 + 4d_1^{*2} \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} h_1(t_0) \right]^2 - 8d_1^* k(t, t_0) \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} h_1(t_0) \right].$$

De façon similaire, (2.7c) peut s'écrire comme suit :

$$-4k(t, t_0)^2 + 4d_1^* k(t, t_0) \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} h_1(t_0) \right].$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(\psi(x, t), t | \psi(x_0, t_0), t_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp \left[-\frac{1}{2V(t)} \times \right. \\ &\quad \left(4k(t, t_0)^2 + 4d_1^{*2} \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} h_1(t_0) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - 8d_1^* k(t, t_0) \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} h_1(t_0) \right] + k(t, t_0)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - 4k(t, t_0)^2 + 4d_1^* k(t, t_0) \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} h_1(t_0) \right] \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp \left[-\frac{1}{2V(t)} \times \right. \\ &\quad \left(k(t, t_0)^2 + 4d_1^{*2} \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} h_1(t_0) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - 4d_1^* k(t, t_0) \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} h_1(t_0) \right] \right) \left. \right] \\ &= f(x, t | x_0, t_0) \exp \left[\frac{2d_1^* k(t, t_0)}{h_2(t)} - 2d_1^{*2} \left(\frac{h_1(t)}{h_2(t)} - \frac{h_1(t_0)}{h_2(t_0)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mais,

$$\frac{2d_1^* k(t, t_0)}{h_2(t)} = \frac{2d_1^* (x - u(t))}{h_2(t)} - \frac{2d_1^* (x_0 - u(t_0))}{h_2(t_0)} + 2d_1^{*2} \left(\frac{h_1(t)}{h_2(t)} - \frac{h_1(t_0)}{h_2(t_0)} \right)$$

et donc,

$$f(\psi(x, t), t | \psi(x_0, t_0), t_0) = f(x, t | x_0, t_0) \frac{\phi(x_0, t_0)}{\phi(x, t)},$$

ou encore,

$$f(x, t | x_0, t_0) = \frac{\phi(x, t)}{\phi(x_0, t_0)} f(\psi(x, t), t | \psi(x_0, t_0), t_0).$$

Maintenant, démontrons (2.6). D'abord, en développant les densités conditionnelles et

en prenant le logarithme de chaque côté, on se rend compte que démontrer (2.6) est équivalent à démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{2d_1^*(x-u(t))}{h_2(t)} + \frac{1}{2V(t)} \left(2u(t) - x - m(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}(x_0 - m(t_0)) \right)^2 \quad (2.8a)$$

$$= \frac{1}{2V(t)} \left(x - m(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}(x_0 - m(t_0)) \right)^2 + \frac{2(x-u(t))(x_0-u(t_0))}{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)}. \quad (2.8b)$$

Développons (2.8a).

$$\begin{aligned} & \frac{2d_1^*(x-u(t))}{h_2(t)} + \frac{1}{2V(t)} \left(2u(t) - 2x + x - m(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}(x_0 - m(t_0)) \right)^2 \\ &= \frac{2d_1^*(x-u(t))}{h_2(t)} + \frac{1}{2V(t)} [(2u(t) - 2x)^2 + k(t, t_0)^2 + 2(2u(t) - 2x)k(t, t_0)] \\ &= \frac{1}{2V(t)} k(t, t_0)^2 + \frac{2(x-u(t))}{V(t)} \left[\frac{d_1^*V(t)}{h_2(t)} + (x-u(t)) - x + m(t) + \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}(x_0 - m(t_0)) \right] \\ &= \frac{1}{2V(t)} k(t, t_0)^2 + \frac{2(x-u(t))}{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)} \frac{h_2(t_0)}{h_2(t)} \\ & \quad \left[\frac{d_1^*(h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t))h_2(t)}{h_2(t)h_2(t_0)} - u(t) + m(t) + \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}(x_0 - m(t_0)) \right] \\ &= \frac{1}{2V(t)} k(t, t_0)^2 + \frac{2(x-u(t))}{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)} \left[\frac{d_1^*h_1(t)h_2(t_0)}{h_2(t)} \right. \\ & \quad \left. - d_1^*h_1(t_0) - (m(t) + d_1^*h_1(t) + d_2^*h_2(t)) \frac{h_2(t_0)}{h_2(t)} + m(t) \frac{h_2(t_0)}{h_2(t)} + (x_0 - m(t_0)) \right] \\ &= \frac{1}{2V(t)} k(t, t_0)^2 + \frac{2(x-u(t))}{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)} [-d_1^*h_1(t_0) - d_2^*h_2(t_0) + x_0 - m(t_0)] \\ &= \frac{1}{2V(t)} \left(x - m(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}(x_0 - m(t_0)) \right)^2 + \frac{2(x-u(t))(x_0-u(t_0))}{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)}. \end{aligned}$$

□

À l'aide du lemme 2.1, on peut démontrer le théorème 2.2 qui permet de trouver la densité du premier temps de passage pour certains types de barrières en utilisant les propriétés de symétrie énoncées. Entre autres, ce théorème donne des solutions pour le mouvement brownien et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour certains types de frontières qui n'étaient pas couvertes dans les sections 2.1.1 et 2.1.2 qui sont en fait des généralisations de frontières considérées initialement par les travaux de (Daniels, 1996).

Théorème 2.2. *Soit,*

$$S(t, t_0) = u(t) - \frac{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)}{2[u(t_0) - y(t_0)]} \ln(c),$$

où $c > 0$, et

$$\alpha[x, t|y(t_0), t_0] = f[x, t|y(t_0), t_0] - c\phi[2u(t_0) - y(t_0), t_0]f[x, t|2u(t_0) - y(t_0), t_0]. \quad (2.9)$$

Alors,

$$g[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] = \frac{u(t_0) - y(t_0)}{r(t) - r(t_0)} \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} \frac{dr(t)}{dt} f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \quad (2.10)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T g[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] dt &= \lim_{t \rightarrow T} F[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] + \\ &\quad c \exp\left(-\frac{2d_1^*[u(t_0) - y(t_0)]}{h_2(t_0)}\right) \times \\ &\quad \lim_{t \rightarrow T} F[S(t, t_0), t|2u(t_0) - y(t_0), t_0] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Démonstration. D'abord, montrons (2.10). On sait que,

$$\int_{-\infty}^{S(t, t_0)} \alpha[x, t|y(t_0), t_0] dx = 1 - \int_{t_0}^t g[S(\tau, t_0), \tau|y(t_0), t_0] d\tau, \quad (2.12)$$

ce qui implique que

$$g[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{S(t, t_0)} \alpha[x, t|y(t_0), t_0] dx.$$

Posons

$$E_1(t) := E(X(t)|X(t_0) = y(t_0)) = m(t) + \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}[y(t_0) - m(t_0)]$$

et

$$E_2(t) := E(X(t)|X(t_0) = 2u(t_0) - y(t_0)) = m(t) + \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}[2u(t_0) - y(t_0) - m(t_0)].$$

On a alors que,

$$\begin{aligned} & g[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{S(t, t_0)} \alpha[x, t|y(t_0), t_0] dx \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} [F[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] - \\ & \quad c\phi[2u(t_0) - y(t_0), t_0]F[S(t, t_0), t|2u(t_0) - y(t_0), t_0]] \\ &= - \left[f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \left(S'(t, t_0) - E_1'(t) - \frac{(S(t, t_0) - E_1(t))V'(t)}{2V(t)} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$- c\phi[2u(t_0) - y(t_0), t_0]f[S(t, t_0), t|2u(t_0) - y(t_0), t_0] \quad (2.13b)$$

$$\left(S'(t, t_0) - E_2'(t) - \frac{(S(t, t_0) - E_2(t))V'(t)}{2V(t)} \right) \Big]. \quad (2.13c)$$

On pose $x_0 = 2u(t_0) - y(t_0)$, donc $\psi(x_0, t_0) = y(t_0)$. Commençons par regarder le terme

(2.13b) afin de la réécrire différemment.

$$\begin{aligned}
 & -c\phi[2u(t_0) - y(t_0), t_0]f[S(t, t_0), t|2u(t_0) - y(t_0), t_0] \\
 & =cf[S(t, t_0), t|x_0, t_0]\phi[x, t]\frac{f(\psi(x, t), t|y(t_0), t_0)}{f(x, t|x_0, t_0)} \\
 & =cf[S(t, t_0), t|x_0, t_0]\frac{f(\psi(x, t), t|y(t_0), t_0)}{f(x, t|x_0, t_0)} \times \\
 & \quad \frac{f(x, t|x_0, t_0) \exp\left(-\frac{2(x-u(t))(u(t_0)-y(t_0))}{h_1(t)h_2(t_0)-h_1(t_0)h_2(t)}\right)}{f(y(t), t|x_0, t_0)} \\
 & =c \exp\left(-\frac{2(x-u(t))(u(t_0)-y(t_0))}{h_1(t)h_2(t_0)-h_1(t_0)h_2(t)}\right) \times \\
 & \quad \frac{f[S(t, t_0), t|x_0, t_0]f(\psi(x, t), t|y(t_0), t_0)}{f(\psi(x, t), t|x_0, t_0)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.14a}$$

(2.14b)

Maintenant, concentrons nous sur la partie (2.14b),

$$\begin{aligned}
& \frac{f[S(t, t_0), t|x_0, t_0]f(\psi(x, t), t|y(t_0), t_0)}{f(\psi(x, t), t|x_0, t_0)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(S(t, t_0) - E_2(t))^2}{V(t)}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\psi(x, t) - E_1(t))^2}{V(t)}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\psi(x, t) - E_2(t))^2}{V(t)}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2V(t)} [(S(t, t_0) - E_2(t))^2 + (\psi(x, t) - E_1(t))^2 - (\psi(x, t) - E_2(t))^2]\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2V(t)} [S(t, t_0)^2 - 2S(t, t_0)E_2(t) + E_1(t)^2 - 2\psi(x, t)E_1(t) + 2\psi(x, t)E_2(t)]\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2V(t)} [(S(t, t_0) - E_1(t))^2 + 2(E_1(t) - E_2(t))(S(t, t_0) - \psi(x, t))]\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi V(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2V(t)} [(S(t, t_0) - E_1(t))^2] \right. \\
&\quad \left. \exp\left(-\frac{1}{2V(t)} 2(E_1(t) - E_2(t))(S(t, t_0) - \psi(x, t))\right)\right) \\
&= \frac{f(S(t, t_0), t|y(t_0), t_0)}{\exp\left(-\frac{1}{2V(t)} \frac{4h_2(t)}{h_2(t_0)} (y(t_0) - u(t_0))(S(t, t_0) - \psi(x, t))\right)} \\
&= \frac{f(S(t, t_0), t|y(t_0), t_0)}{\exp\left(-\frac{1}{2V(t)} \frac{4h_2(t)}{h_2(t_0)} (y(t_0) - u(t_0)) \right. \\
&\quad \left. \left([u(t) - \psi(x, t)] - \frac{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)}{2(u(t_0) - y(t_0))} \ln(c)\right)\right)} \\
&= \frac{f(S(t, t_0), t|y(t_0), t_0)}{\exp\left(-\frac{1}{2V(t)} \frac{4h_2(t)}{h_2(t_0)} (y(t_0) - u(t_0))(u(t) - \psi(x, t)) - \ln(c)\right)} \\
&= f(S(t, t_0), t|y(t_0), t_0) \exp\left(2 \frac{(u(t_0) - y(t_0))(x - u(t))}{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)}\right) \frac{1}{c}. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Donc, en remplaçant (2.14b) par (2.15), on obtient

$$\begin{aligned}
 & c\phi[2u(t_0) - y(t_0), t_0]f[S(t, t_0), t|2u(t_0) - y(t_0), t_0] = \\
 & c \exp\left(-\frac{2(x - u(t))(u(t_0) - y(t_0))}{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)}\right) \times \frac{f[S(t, t_0), t|x_0, t_0]f(y(t), t|y(t_0), t_0)}{f(y(t), t|x_0, t_0)} = \\
 & c \exp\left(-\frac{2(x - u(t))(u(t_0) - y(t_0))}{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)}\right) \times \\
 & f(S(t, t_0), t|y(t_0), t_0) \exp\left(2\frac{(u(t_0) - y(t_0))(x - u(t))}{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)}\right) \frac{1}{c} = \\
 & f(S(t, t_0), t|y(t_0), t_0). \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Ensuite, on remplace (2.16) dans (2.13).

$$\begin{aligned}
 & g[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \\
 & = - \left[f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \left(S'(t, t_0) - E_1'(t) - \frac{(S(t, t_0) - E_1(t))V'(t)}{2V(t)} \right) \right. \\
 & \quad \left. - c\phi[2u(t_0) - y(t_0), t_0]f[S(t, t_0), t|2u(t_0) - y(t_0), t_0] \right. \\
 & \quad \left. \left(S'(t, t_0) - E_2'(t) - \frac{(S(t, t_0) - E_2(t))V'(t)}{2V(t)} \right) \right] \\
 & = -f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \left(S'(t, t_0) - E_1'(t) - \frac{(S(t, t_0) - E_1(t))V'(t)}{2V(t)} \right) \\
 & \quad + f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \left(S'(t, t_0) - E_2'(t) - \frac{(S(t, t_0) - E_2(t))V'(t)}{2V(t)} \right) \\
 & = f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \left[E_1'(t) - E_2'(t) - \frac{(E_1(t) - E_2(t))V'(t)}{2V(t)} \right].
 \end{aligned}$$

Maintenant, développons les espérances et variances.

$$\begin{aligned}
g[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] &= f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \left[-\frac{2h'_2(t)}{h_2(t_0)}[u(t_0) - y(t_0)] + \right. \\
&\quad \left. \frac{\frac{2h_2(t)}{h_2(t_0)}[u(t_0) - y(t_0)] \left[h'_2(t)h_1(t) + h'_1(t)h_2(t) - \frac{2h'_2(t)h_2(t)h_1(t_0)}{h_2(t_0)} \right]}{2h_2(t) \left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}h_1(t_0) \right]} \right] \\
&= f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \frac{[u(t_0) - y(t_0)]}{h_2(t_0)} \left[-2h'_2(t) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\left[h'_2(t)h_1(t) + h'_1(t)h_2(t) - \frac{2h'_2(t)h_2(t)h_1(t_0)}{h_2(t_0)} \right]}{\left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}h_1(t_0) \right]} \right] \\
&= f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \frac{[u(t_0) - y(t_0)]}{h_2(t_0)} \left[\frac{-2h_1(t)h'_2(t) + 2\frac{h'_2(t)h_2(t)h_1(t_0)}{h_2(t_0)}}{\left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}h_1(t_0) \right]} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\left[h'_2(t)h_1(t) + h'_1(t)h_2(t) - \frac{2h'_2(t)h_2(t)h_1(t_0)}{h_2(t_0)} \right]}{\left[h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}h_1(t_0) \right]} \right] \\
&= f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \frac{[u(t_0) - y(t_0)]}{h_2(t_0)} \left[\frac{h'_1(t)h_2(t) - h_1(t)h'_2(t)}{h_1(t) - \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)}h_1(t_0)} \right] \\
&= f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0][u(t_0) - y(t_0)] \left[\frac{\frac{dr(t)}{dt} h_2(t)^2}{h_1(t)h_2(t_0) - h_2(t)h_1(t_0)} \right] \\
&= f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0][u(t_0) - y(t_0)] \left[\frac{h_2(t)^2}{(r(t) - r(t_0))h_2(t_0)h_2(t)} \right] \frac{dr(t)}{dt} \\
&= f[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] \frac{[u(t_0) - y(t_0)]}{r(t) - r(t_0)} \frac{h_2(t)}{h_2(t_0)} \frac{dr(t)}{dt}.
\end{aligned}$$

Puis, pour (2.11), on intègre de chaque côté de (2.9) par rapport à x de $-\infty$ à $S(t, t_0)$,

i.e.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{S(t, t_0)} \alpha[x, t|y(t_0), t_0] dx = \\
&\int_{-\infty}^{S(t, t_0)} f[x, t|y(t_0), t_0] - c\phi[2u(t_0) - y(t_0), t_0] \times f[x, t|2u(t_0) - y(t_0), t_0] dx.
\end{aligned}$$

Avec (2.12) et en faisant tendre t vers T , on a

$$\begin{aligned}
 1 - \int_{t_0}^T g[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] dt &= \lim_{t \rightarrow T} \int_{-\infty}^{S(t, t_0)} f[x, t|y(t_0), t_0] - \\
 &\quad c\phi[2u(t_0) - y(t_0), t_0] f[x, t|2u(t_0) - y(t_0), t_0] dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow T} F[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] - c\phi[2u(t_0) - y(t_0), t_0] \\
 &\quad \times \lim_{t \rightarrow T} F[S(t, t_0), t|2u(t_0) - y(t_0), t_0].
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^T g[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] dt &= 1 - \lim_{t \rightarrow T} F[S(t, t_0), t|y(t_0), t_0] + c\phi[2u(t_0) - y(t_0), t_0] \\
 &\quad \times \lim_{t \rightarrow T} F[S(t, t_0), t|2u(t_0) - y(t_0), t_0].
 \end{aligned}$$

□

Dans le prochain chapitre, on montrera comment ce théorème peut être utile dans le contexte d'une option à barrière et en gestion de portefeuille.

CHAPITRE III

EXEMPLES D'APPLICATIONS

3.1 Valeur d'une option à barrière

En finance, un produit dérivé est un instrument financier dont la valeur change en fonction du taux ou du prix d'un actif appelé sous-jacent. C'est un contrat entre deux partis, un acheteur et un vendeur, dont le règlement se fait à une date ultérieure.

Une option est un exemple classique de produit dérivé. Dans ce cas, l'acheteur obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter (*call*) ou de vendre (*put*) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (*strike*), pendant une période donnée ou à une date déterminée.

Il existe plusieurs types d'options, par exemple les options américaines et européennes. Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux options à barrières, plus précisément aux options avec une seule barrière, *i.e.* une option qui est «activée» (ou «désactivée») si le prix atteint une barrière. Le problème qui nous intéresse ici est de calculer la valeur d'une telle option. Notons d'abord qu'il existe quatre cas possibles :

- *Down-and-in* : Au moment de l'achat, le prix est au-dessus de la barrière et l'option peut être utilisée seulement si le prix descend en dessous de la barrière au moins une fois.
- *Up-and-in* : Au moment de l'achat, le prix est en dessous de la barrière et l'option peut être utilisée seulement si le prix monte au-dessus de la barrière au moins une fois.

- *Down-and-out* : Au moment de l'achat, le prix est au-dessus de la barrière et l'option ne peut pas être utilisée si le prix descend en dessous de la barrière au moins une fois.
- *Up-and-out* : Au moment de l'achat, le prix est en dessous de la barrière et l'option ne peut pas être utilisée si le prix monte au-dessus de la barrière au moins une fois.

La valeur de l'option pour chacun des cas peut être déterminée à partir d'une seule situation, nous allons ainsi nous intéresser uniquement au «Down-and-in call» (DIC), où «call» signifie que l'on adopte le point de vue de l'acheteur.

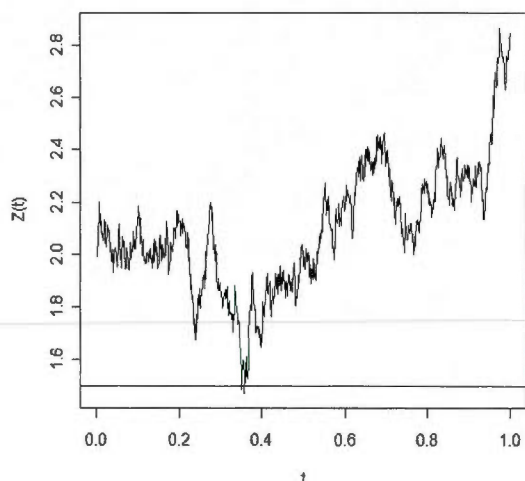


Figure 3.1 Prix d'un actif

La figure 3.1 est un exemple du prix d'un actif, $Z(t)$, qui évolue dans le temps. Si quelqu'un achète une option «down-and-in» sur cet actif au temps 0 avec comme barrière 1.5, l'option serait activée, car le prix atteint la barrière un peu avant $t = 0.4$ et cette personne pourrait alors exercer son option à profit. En effet, lorsque la barrière est atteinte, l'option agit comme une option standard (vanille). Il est connu que la recette à l'échéance d'une option standard à la date T est le $\max(Z(T) - K, 0)$, où $Z(T)$ est le prix de l'actif au temps T et K est le prix d'exercice fixé par l'option. À partir de cela, on peut trouver facilement la valeur de l'option. Par contre, la valeur d'un DIC

est un peu plus difficile à obtenir, car celle-ci varie selon que la frontière est atteinte ou non. Donc, pour calculer la valeur d'un DIC, on doit d'abord calculer la probabilité que le prix du sous-jacent atteigne la barrière avant le temps T . Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème 2.2.

3.1.1 Densité du premier temps de passage

On suppose d'abord que le prix $Z(t)$ satisfait la dynamique risque-neutre de Black-Scholes-Merton,

$$dZ(t) = rZ(t)dt + \sigma Z(t)dW(t), \quad (3.1)$$

où $t \in [0, T]$, $W(t)$ est un mouvement brownien standard, $Z(0) = Z > 0$, $r > 0$ est le taux d'intérêt et σ est le taux de volatilité. On dénote aussi par K le prix d'exercice et par B la frontière fixe. On a que $Z > B$.

En fait, l'équation (3.1) se résout facilement et donne

$$Z(t) = Ze^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma W(t)}.$$

Donc, calculer la probabilité que $Z(t) = B$ pour au moins un t sur $(0, T)$ revient à calculer la probabilité qu'il existe $t \in (0, T)$ tel que $W(t) = \frac{\ln(B/Z) - (r-\sigma^2/2)t}{\sigma}$. Alors, le problème se résume à trouver la densité de probabilité du premier temps de passage d'un mouvement brownien standard à une frontière affine.

On sait que pour un mouvement brownien standard, $h_1(t) = t$, $h_2(t) = 1$ et $r(t) = t$. De plus, on pose

$$c_1 = \frac{-2(r - \sigma^2/2) \ln(B/Z)}{\sigma^2},$$

$$y(t) = \frac{\ln(B/Z)}{\sigma} - \frac{c_1 \sigma}{2(r - \sigma^2/2)}$$

et

$$u(t) = \frac{\ln(B/Z)}{\sigma},$$

où $c_1 = \ln(c)$. On a bien $y(t) < u(t) \forall t \in (0, T)$. Avec ces définitions, on obtient l'expression désirée suivante :

$$\begin{aligned} S(t, 0) &= u(t) - \frac{[h_1(t)h_2(0) - h_1(0)h_2(t)]c_1}{2(u(0) - y(0))} \\ &= \frac{\ln(B/Z)}{\sigma} - \frac{tc_1}{2 \left(\frac{\ln(B/Z)}{\sigma} - \left[\frac{\ln(B/Z)}{\sigma} - \frac{c_1 \sigma}{2(r - \sigma^2/2)} \right] \right)} \\ &= \frac{\ln(B/Z)}{\sigma} - \frac{(r - \sigma^2/2)t}{\sigma}, \end{aligned}$$

Maintenant, à l'aide du théorème 2.2,

$$\begin{aligned} g(S(t, 0), t|y(0), 0) &= \frac{[u(0) - y(0)]}{r(t) - r(0)} \frac{h_2(t)}{h_2(0)} \frac{dr(t)}{dt} f[S(t, 0), t|y(0), 0] \\ &= \frac{c_1 \sigma}{2(r - \sigma^2/2)t} f[S(t, 0), t|y(0), 0] \\ &= \frac{\sigma}{2(r - \sigma^2/2)t} \frac{-2(r - \sigma^2/2) \ln(B/Z)}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{1}{2t} \times \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\ln(B/Z)}{\sigma} - \frac{(r - \sigma^2/2)t}{\sigma} - \frac{\ln(B/Z)}{\sigma} - \frac{c_1 \sigma}{2(r - \sigma^2/2)} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\ln(Z/B)}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(r - \sigma^2/2)t + \ln(Z/B)}{\sigma \sqrt{t}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

3.1.2 Calcul de la valeur de l'option

Pour calculer la valeur d'une option à barrière, on peut utiliser le premier temps de passage. En effet, si le premier temps de passage est inférieur à T , *i.e.* $T_B < T$ pour $Z(t)$, alors le DIC devient une option standard à partir de ce temps $t \in (0, T)$. Donc, la valeur du DIC au temps t (DIC_t) est égale à la valeur d'une option standard au temps t avec prix de départ $Z_0 = B$, $C(B, t)$ (car la barrière B est atteinte en ce point). Si le

premier temps de passage est après T , la valeur DIC_T est nulle. Plus rigoureusement, le prix d'un DIC est donné par

$$E_{Z_0}[e^{-rT}(Z(T) - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_B < T\}}],$$

où l'espérance et les probabilités sont sous la mesure risque-neutre. En utilisant successivement la propriété télescopique de l'espérance conditionnelle et la propriété de Markov forte de $Z(t)$, on peut écrire la valeur initiale d'un DIC comme suit :

$$\begin{aligned} & E_{Z_0}[e^{-rT}(Z(T) - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_B < T\}}] \\ &= E_{Z_0}[e^{-rT_B} \mathbb{1}_{\{T_B < T\}} E_{Z_0}[e^{-r(T-T_B)}(Z_T - K)^+ | \mathcal{F}_{T_B}]] \\ &= E_{Z_0}[e^{-rT_B} \mathbb{1}_{\{T_B < T\}} E_B[e^{-r(T-t)}(\tilde{Z}(T)^{t,B} - K)^+ | t = T_B]] \\ &= E_{Z_0}[e^{-rT_B} \mathbb{1}_{\{T_B < T\}} C(B, t)] \\ &= \int_0^T e^{-rt} C(B, t) P_{Z_0}(T_B \in dt) \\ &= \int_0^T e^{-rt} C(B, t) g(S(t, 0), t | y(0), 0) dt. \end{aligned}$$

où $\tilde{Z}(T)^{t,B}$ est une copie indépendante du mouvement brownien géométrique avec valeur initiale $Z(t) = B$ et $C(B, t)$ est la valeur d'une option standard, *i.e.*

$$\begin{aligned} C(B, t) &= BN \left[\frac{\ln(B/K) + (r + (1/2)\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right] \\ &\quad - Ke^{-r(T-t)} N \left[\frac{\ln(B/K) + (r - (1/2)\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right], \end{aligned}$$

où $N[\cdot]$ est la fonction de répartition de la loi normale standard.

Alors,

$$\begin{aligned}
DIC = & \int_0^T \left\{ e^{-rs} \left(BN \left[\frac{\ln(B/K) + (r + 1/2\sigma^2)(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. - Ke^{-r(T-s)} N \left[\frac{\ln(B/K) + (r - 1/2\sigma^2)(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}} \right] \right) \right. \\
& \left. \times \frac{\ln(Z/B)}{\sqrt{2\pi\sigma^2s^3}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln(Z/B) + (r - 1/2\sigma^2)s}{\sigma\sqrt{s}} \right]^2 \right) \right\} ds.
\end{aligned}$$

On peut évaluer cette intégrale analytiquement, mais les calculs sont plutôt laborieux. Nous allons en voir les principales étapes. D'abord, on pose $x = \ln(Z/B)$, $k = \ln(K/B)$ et $\mu = r - (1/2)\sigma^2$. Puis, en posant $c(\sigma) = BN \left[\frac{-k + (\mu + \sigma^2)(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}} \right] - Ke^{-r(T-s)} N \left[\frac{-r + \mu(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}} \right]$ et en utilisant le théorème fondamental du calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
DIC = & \int_0^T e^{-rs} \max[0, B - Ke^{-r(T-s)}] \frac{x}{\sigma\sqrt{s^3}} n \left[\frac{x + \mu s}{\sigma\sqrt{s}} \right] ds \\
& + \int_0^T e^{-rs} \int_0^\sigma Ke^{-r(T-s)} n[d_2] \sqrt{T-s} dv \frac{x}{\sigma\sqrt{s^3}} n \left[\frac{x + \mu s}{\sigma\sqrt{s}} \right] ds \\
= & I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

où $d_2 = \frac{-k + \mu(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}}$ et $n[\cdot]$ est la fonction de densité de la loi normale standard. Débutons avec I_1 , on pose $z = k - rT$ et $T^* = -z/r$, donc $B - Ke^{-r(T-s)} > 0$ si et seulement si $0 \leq T^* \leq T$. Nous avons,

$$\begin{aligned}
I_1 = & \int_0^{T^*} e^{-rs} (B - Ke^{-r(T-s)}) \frac{x}{\sigma\sqrt{s^3}} n \left[\frac{x + \mu s}{\sigma\sqrt{s}} \right] ds \\
= & ZN[e_1] - Ke^{-rT} N[e_2] + B \left(\frac{Z}{B} \right)^{-2r/\sigma^2} N[e_3] - Ke^{-rT} \left(\frac{Z}{B} \right)^{-2r/\sigma^2 + 1} N[e_4]
\end{aligned}$$

lorsque $0 \leq T^* \leq T$ et où $e_1 = \frac{\ln(B/Z) - (r + 1/2\sigma^2)T^*}{\sigma\sqrt{T^*}}$, $e_2 = e_1 + \sigma\sqrt{T^*}$, $e_3 = \frac{\ln(B/Z) + (r + 1/2\sigma^2)T^*}{\sigma\sqrt{T^*}}$ et $e_4 = e_3 - \sigma\sqrt{T^*}$. Les propriétés suivantes (Berger, 1996) ont été utilisées pour arriver à ce résultat :

pour α, β, γ quelconques, $T > 0$ et $n[y] = \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}}$, on a

$$e^{-\gamma s} n \left[\frac{\alpha}{\sqrt{s}} + \beta \sqrt{s} \right] = e^{-\alpha\beta + \alpha\sqrt{\beta^2 + 2\gamma}} n \left[\frac{\alpha}{\sqrt{s}} + \sqrt{\beta + 2\gamma} \sqrt{s} \right]$$

et

$$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{s^3}} n \left[\frac{\alpha + \beta s}{\sqrt{s}} \right] ds = \frac{1}{|\alpha|} \left(N \left[\frac{-|\alpha| - \operatorname{sgn}(\alpha)\beta T}{\sqrt{T}} \right] + e^{-2\alpha\beta} N \left[\frac{-|\alpha| + \operatorname{sgn}(\alpha)\beta T}{\sqrt{T}} \right] \right).$$

Ensuite, pour la deuxième intégrale,

$$I_2 = \int_0^T e^{-rs} \int_0^\sigma K e^{-r(T-s)} n[d_2] \sqrt{T-s} dv \frac{x}{\sigma \sqrt{s^3}} n \left[\frac{x + \mu s}{\sigma \sqrt{s}} \right] ds.$$

En posant $t = \frac{v^2}{\sigma^2}(T-s)$, par le théorème de Fubini et le fait que $n[-y] = n[y]$,

$$I_2 = \frac{\sigma^2 K e^{-rT}}{2} \int_0^T I_3 dt,$$

où

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^t \frac{1}{\sigma \sqrt{t-s}} n \left[\frac{k - r(T-t) - (r - 1/2\sigma^2)(t-s)}{\sigma \sqrt{t-s}} \right] \frac{x}{\sigma \sqrt{s^3}} n \left[\frac{x + \mu s}{\sigma \sqrt{s}} \right] ds \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \exp \left(\frac{-2t\mu x - 2t\mu(z + rt) + (z + rt)^2 + x^2 + \mu^2 t^2}{2t\sigma^2} \right) \exp \left(\frac{-x}{\sigma \sqrt{t}} \left| \frac{z + bt}{\sigma \sqrt{t}} \right| \right). \end{aligned}$$

À l'aide de la transformée de Laplace et quelques manipulations, on peut voir que

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{e^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}}}{\sigma \sqrt{t}} n \left[\frac{z + x + (r - \mu)t}{\sigma \sqrt{t}} \right] - \\ &\quad \left(\frac{e^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}}}{\sigma \sqrt{t}} n \left[\frac{z + x + (r - \mu)t}{\sigma \sqrt{t}} \right] - \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} n \left[\frac{-z + x - (r - \mu)t}{\sigma \sqrt{t}} \right] \right) \mathbb{1}_{\{t \leq T^*\}}. \end{aligned}$$

Il y a maintenant deux cas possibles, $T^* < 0 < T$ ou $0 \leq T^* < T$.

CAS A : $T^* < 0 < T$

$$\begin{aligned} DIC &= I_1 + I_2 \\ &= 0 + \frac{\sigma^2 K e^{-rT}}{2} \int_0^T \frac{e^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{t}} n \left[\frac{z+x+(r-\mu)t}{\sigma\sqrt{t}} \right] dt \end{aligned}$$

À l'aide de l'identité suivante (Berger, 1996),

$$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{s}} n \left[\frac{\alpha + \beta s}{\sqrt{s}} \right] ds = \frac{\text{sgn}(\alpha)}{\beta} \left(N \left[\frac{|\alpha| + \text{sgn}(\alpha)\beta T}{\sqrt{T}} \right] + e^{-2\alpha\beta} N \left[\frac{-|\alpha| + \text{sgn}(\alpha)\beta T}{\sqrt{T}} \right] - 1 \right) \quad (3.2)$$

et de quelques manipulations,

$$\begin{aligned} DIC &= -K e^{-rT} \left(\frac{Z}{B} \right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}+1} N \left[\frac{\ln(B^2/KZ) + (r-1/2\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right] \\ &\quad + B \left(\frac{Z}{B} \right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}} N \left[\frac{\ln(B^2/KZ) + (r+1/2\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right]. \end{aligned}$$

CAS B : $0 < T^* < T$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} DIC &= I_1 + I_2 \\ &= ZN[e_1] - K e^{-rT} N[e_2] + B \left(\frac{Z}{B} \right)^{-2r/\sigma^2} N[e_3] - K e^{-rT} \left(\frac{Z}{B} \right)^{-2r/\sigma^2+1} N[e_4] \\ &\quad + \frac{\sigma^2 K e^{-rT}}{2} \left\{ \int_0^T \frac{e^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{t}} n \left[\frac{z+x+(r-\mu)t}{\sigma\sqrt{t}} \right] - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{e^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{t}} n \left[\frac{z+x+(r-\mu)t}{\sigma\sqrt{t}} \right] - \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} n \left[\frac{-z+x-(r-\mu)t}{\sigma\sqrt{t}} \right] \right) \mathbb{1}_{\{t \leq T^*\}} dt \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.2), on obtient encore

$$\begin{aligned} DIC &= -K e^{-rT} \left(\frac{Z}{B} \right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}+1} N \left[\frac{\ln(B^2/KZ) + (r-1/2\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right] \\ &\quad + B \left(\frac{Z}{B} \right)^{\frac{-2r}{\sigma^2}} N \left[\frac{\ln(B^2/KZ) + (r+1/2\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right]. \end{aligned}$$

3.2 Gestion de portefeuille

3.2.1 Définition du problème

En théorie du portefeuille, une méthode d'optimisation bien connue et populaire est la stratégie moyenne-variance de Markowitz. Dans ce modèle, le rendement d'un actif est une variable aléatoire et un portefeuille est une combinaison linéaire d'actifs. Donc, le rendement d'un portefeuille est une variable aléatoire. La méthode consiste à minimiser la variance du rendement du portefeuille à une échéance donnée pour une certaine espérance. Dans cette section, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble d'événements, \mathcal{F} une filtration de dimension m à laquelle est adaptée un mouvement brownien standard multidimensionnel $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ et \mathbb{P} est une mesure de probabilité. Notons que les m mouvements browniens unidimensionnels sont indépendants. On considère un portefeuille avec $m + 1$ actifs (de valeur $Z_i(t)$), dont un sans risque, *i.e.* pour $t \geq 0$,

$$Z_0(t) = z_0 e^{\int_0^t r(s) ds},$$

où $r(t)$ est le taux d'intérêt. Pour les m autres actifs, la valeur $Z_i(t)$ satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dZ_i(t) = Z_i(t) \left(\mu_i(t) dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t) dW^j(t) \right), \quad (3.3)$$

$$Z_i(0) = z_i > 0, \quad (3.4)$$

avec $\mu_i(t)$ le terme de dérive et $\sigma_{ij}(t)$ le terme de volatilité. On définit ensuite $\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_m(t))'$ le portefeuille au temps $0 \leq t \leq T$. Ensuite, $x(t)$ est la richesse de l'investisseur au temps t avec $x(0) = x_0 > 0$. En supposant que le portefeuille est défini sur un intervalle continu, autofinancé et qu'il n'y a aucun coût de transaction, $x(t)$ doit satisfaire l'équation différentielle suivante :

$$dx(t) = [r(t)x(t) + \pi(t)'b(t)]dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t), \quad (3.5)$$

où $b(t) = (\mu_1(t) - r(t), \dots, \mu_m(t) - r(t))'$ (Salminen et Borodin, 2002).

Définition 3.1. Un portefeuille $\pi(\cdot)$ est dit *admissible* si $\pi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}([0, T], \mathbb{R}^m)$ et si l'équation différentielle (3.5) a une solution unique $(\pi(\cdot))$.

L'objectif est alors de trouver un portefeuille admissible $\pi(\cdot)$ tel que $E(x(T)) = ae^{\int_0^T r(s)ds}$, où a est connu à l'avance et satisfait $a \geq x_0$. Le portefeuille optimal est un portefeuille qui satisfait ces conditions et qui minimise la variance.

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, et considérons le portefeuille suivant,

$$\pi_\gamma(t) = -(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1}b(t)[x_\gamma(t) - \gamma e^{\int_0^t r(s)ds}], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.6)$$

où $x_\gamma(t)$ est le processus de richesse correspondant. Notons que ce portefeuille est le plus efficace correspondant à tout $a \geq x_0$ si $\gamma = \frac{z - x_0 e^{-\beta(T)}}{1 - e^{-\beta(T)}}$ où $\beta(t) = \int_0^t |\theta(s)|^2 ds$, $\theta(t) = \sigma(t)^{-1}b(t)$ et $z > x_0$.

En substituant (3.6) dans (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} dx_\gamma(t) &= \left([r(t) - |\theta(t)|^2]x_\gamma(t) + \gamma e^{\int_0^t r(s)ds} |\theta(t)|^2 \right) dt \\ &\quad + \left(\gamma e^{\int_0^t r(s)ds} - x_\gamma(t) \right) \theta(t)' dW(t). \end{aligned}$$

Cette équation différentielle possède une solution unique qui est la suivante :

$$x_\gamma(t) = \gamma e^{\int_0^t r(s)ds} + (x_0 - \gamma) \exp \left(\int_0^t r(s)ds - \varphi(t) \right), \quad (3.7)$$

où $\varphi(t) = \frac{3}{2}\beta(t) + \int_0^t \theta(s)dW(s)$. On pose $\hat{W}(\beta(t)) = \int_0^t \theta(s)dW(s)$, il en découle que $\varphi(t) = \frac{3}{2}\beta(t) + \hat{W}(\beta(t))$.

On s'intéresse à la probabilité d'atteindre le montant désiré, $ae^{\int_0^T r(s)ds}$, avant un certain temps T , i.e.

$$\tau_\gamma(T) = \inf\{0 < t \leq T : x_\gamma(t) = ae^{\int_0^t r(s)ds}\}. \quad (3.8)$$

En remplaçant (3.7) dans (3.8), on obtient

$$\tau_\gamma(T) = \inf\{0 < t \leq T : \varphi(t) = L(\gamma)\}, \quad (3.9)$$

où $L(\gamma) = \log\left(\frac{\gamma - x_0}{\gamma - z}\right)$. On peut donc en déduire que (3.8) est équivalent à

$$\tau_\gamma(T) = \inf\left\{0 < t \leq T : \hat{W}(\beta(t)) = L(\gamma) - \frac{3}{2}\beta(t)\right\}, \quad (3.10)$$

ce qui revient à calculer la probabilité qu'un mouvement brownien atteigne une droite avant T .

3.2.2 Calcul de la probabilité $P(\tau_\gamma(T) < T)$

Maintenant, pour le calcul de $P(\tau_\gamma(T) < T)$, utilisons le théorème 2.2. On commence par poser $u(\beta(t)) = L(\gamma)$, $y(\beta(t)) = 0$ et $c = \exp(3L(\gamma))$. On a bien $u(\beta(t)) > y(\beta(t))$ $\forall t \in (0, T)$. De plus,

$$\begin{aligned} S(\beta(t), 0) &= u(\beta(t)) - \frac{h_1(\beta(t))h_2(0) - h_1(0)h_2(\beta(t))}{2[u(0) - y(0)]} \ln(c) \\ &= L(\gamma) - \frac{3}{2}\beta(t), \end{aligned}$$

car il s'agit d'un mouvement brownien. Maintenant, on n'a qu'à utiliser l'équation (2.11)

$$\begin{aligned} P(\tau_\gamma(T) < T) &= \int_0^T g(S(\beta(t), 0), \beta(t) | y(0), 0) dt \\ &= 1 - \lim_{t \rightarrow T} F[S(\beta(t), 0), \beta(t) | y(0), 0] + \\ &\quad c\phi[2u(0) - y(0), 0] \lim_{t \rightarrow T} F[S(\beta(t), 0), \beta(t) | 2u(0) - y(0), 0] \\ &= 1 - \lim_{t \rightarrow T} N\left(\frac{L(\gamma) - \frac{3}{2}\beta(t)}{\sqrt{\beta(t)}}\right) + \\ &\quad \exp(3L(\gamma)) \lim_{t \rightarrow T} N\left(\frac{-L(\gamma) - \frac{3}{2}\beta(t)}{\sqrt{\beta(t)}}\right) \\ &= N\left(-\frac{L(\gamma)}{\sqrt{\beta(T)}} + \frac{3}{2}\sqrt{\beta(T)}\right) + \\ &\quad \exp(3L(\gamma)) N\left(-\frac{L(\gamma)}{\sqrt{\beta(T)}} - \frac{3}{2}\sqrt{\beta(T)}\right). \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que lorsque γ tend vers l'infini, positivement ou négativement, $L(\gamma)$ tend vers 0, ce qui implique que $P(\tau_\gamma(T) < T)$ tend vers 1. On peut donc conclure, que plus on prend γ grand (négativement ou positivement), plus on a de chance d'atteindre notre objectif. Ce résultat montre qu'il n'est pas utile de regarder seulement la probabilité d'atteindre notre objectif, car le risque n'est pas bien pris en compte.

CHAPITRE IV

SIMULATIONS

Les méthodes étudiées au chapitre 2 permettent de calculer de façon précise la densité du premier temps de passage à travers une certaine frontière. Par contre, le problème n'est pas résolu pour toutes les frontières. Il est donc naturel de penser à développer des méthodes d'approximations numériques.

Deux méthodes seront comparées dans le présent chapitre. D'abord, il sera question de la méthode DNPR (Di Nardo et al., 2001), puis de celle de Durbin et Williams (Durbin et Williams, 1992). Notons que toutes les simulations dans le présent chapitre ont été effectuées avec le logiciel MATLAB.

4.1 Méthode DNPR

Cette méthode consiste à discrétiser (2.3) afin d'évaluer l'intégrale. Tout d'abord, afin d'alléger la notation, définissons

$$g(t) := g(S(t), t | x_0, t_0) \quad t, t_0 \in T, t_0 < t,$$

$$\Psi(t) := \Psi(S(t), t | x_0, t_0) \quad t, t_0 \in T, t_0 < t,$$

$$\Psi(t|\tau) := \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) \quad t, \tau \in T, t_0 < \tau \leq t.$$

On pose un pas de discrétisation $p > 0$ et $t = t_0 + kp$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Donc (2.3) devient

$$g(t_0 + kp) = -2\Psi(t_0 + kp) + 2 \int_{t_0}^{t_0 + kp} g(\tau) \Psi(t_0 + kp|\tau) d\tau. \quad (4.1)$$

Pour estimer l'intégrale de (4.1), on divise le problème en deux cas possibles, k pair et impair. Ensuite, la règle de Simpson est utilisée (Atkinson, 1989).

1. CAS k pair ($k = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$)

On évalue l'intégrale en posant trois poids, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$ et $\frac{1}{3}$ à $t_0 + jp$, $t_0 + (j+1)p$ et $t_0 + (j+2)p$ respectivement, où $j = 0, 1, \dots, k-2$.

2. CAS k impair ($k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$)

On sépare l'intégrale en une somme de deux intégrales,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0 + (2n+1)p} g(\tau) \Psi(t_0 + kp|\tau) d\tau &= \int_{t_0}^{t_0 + (2n-2)p} g(\tau) \Psi(t_0 + kp|\tau) d\tau \\ &+ \int_{t_0 + (2n-2)p}^{t_0 + (2n+1)p} g(\tau) \Psi(t_0 + kp|\tau) d\tau \end{aligned}$$

La première intégrale s'estime de la même façon qu'en 1., puis pour la seconde, on utilise la règle $\frac{3}{8}$ de Simpson. On pose des poids de $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$ et $\frac{3}{8}$ à $t_0 + (2n-2)p$, $t_0 + (2n-1)p$, $t_0 + (2n)p$ et $t_0 + (2n+1)p$ respectivement.

On évalue donc numériquement $g(t_0 + kp)$ à l'aide de l'algorithme itératif suivant :

$$\tilde{g}(t_0 + p) = -2\Psi(t_0 + p), \quad (4.2)$$

$$\tilde{g}(t_0 + kp) = -2\Psi(t_0 + kp) + 2p \sum_{j=1}^{k-1} w_{k,j} \tilde{g}(t_0 + jp) \Psi(t_0 + kp|t_0 + jp) \quad (4.3)$$

$$(k = 2, 3, \dots),$$

où $\tilde{g}(t_0 + kp)$ représente l'évaluation numérique de $g(t_0 + kp)$ et les poids $w_{k,j}$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 k \text{ pair et } j \text{ impair} &\implies w_{k,j} = 4/3 \\
 k \text{ pair et } j \text{ pair} &\implies w_{k,j} = 2/3 \\
 k \text{ impair, } j \text{ impair et } j \leq k-4 &\implies w_{k,j} = 4/3 \\
 k \text{ impair, } j \text{ pair et } j \leq k-4 &\implies w_{k,j} = 2/3 \\
 k \text{ impair et } j = k-3 &\implies w_{k,j} = 17/24 \\
 k \text{ impair et } j = k-2, k-1 &\implies w_{k,j} = 9/8.
 \end{aligned}$$

Le théorème 4.1 de (Di Nardo et al., 2001) montre que $\tilde{g}(t_0 + kp)$ tend vers $g(t_0 + kp)$ lorsque $p \rightarrow 0$. Plus précisément,

Théorème 4.1. *Soit p le pas de discrétisation, $t_m = t_0 + Np$, $N \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$\Delta_{kp} := g(t_0 + kp) - \tilde{g}(t_0 + kp) \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Alors

$$\lim_{p \rightarrow 0} |\Delta_{kp}| = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

pour tout kp fixe.

Ainsi, il est montré que

$$|\Delta_{kp}| \leq 2Npe^{8Mkp/3}\omega[(\Psi g)_{kp}, 2p/3], \quad (4.4)$$

où

$$M = \max_{t_0 \leq \tau \leq t_m} |\Psi(t|\tau)|$$

et

$$\omega[(\Psi g)_{kp}, 2p/3] = \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in [t_0, t_0 + kp] \\ |\tau_1 - \tau_2| < 2p/3}} |g(\tau_1)\Psi(t_0 + kp|\tau_1) - g(\tau_2)\Psi(t_0 + kp|\tau_2)|$$

Voyons maintenant la méthode de Durbin.

4.2 Méthode de Durbin

En 1985, Durbin a publié une formule explicite pour la densité du premier temps de passage d'un processus gaussien à une frontière générale (Durbin, 1985). Par contre, cette formule n'est directement calculable que dans certains cas. Une approximation a été suggérée pour le cas général, mais c'est seulement dans un article publié en 1992 (Durbin et Williams, 1992) que des bornes pour l'erreur de l'approximation ont été énoncées. Dans ce dernier, on regarde plus précisément le cas du mouvement brownien et pour ce cas particulier, la formule publiée en 1985 devient une série où les termes sont des intégrales multiples de dimensions croissantes. C'est sur ce cas que nous allons nous concentrer pour la suite.

Soit $W(\tau)$ un mouvement brownien standard pour $0 \leq \tau \leq \infty$ et $a(\tau)$ la barrière, où $a(0) > 0$, $a(\tau)$ est dérivable de façon continue sur $(0, T)$ et $a(\tau)/\tau - a'(\tau) > 0$ sur $(0, T)$, (Durbin, 1985) a montré que la densité du premier temps de passage au temps $\tau = t$ est

$$p(t) = b(t)f(t), \quad 0 < t < T,$$

où

$$b(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{1}{t-s} E[\mathbf{1}_{\{s, W\}}(a(s) - W(s)) | W(t) = a(t)]$$

et $f(t)$ est la densité de $W(t)$ sur la barrière, *i.e.*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{a(t)^2}{2t}\right).$$

De plus, $\mathbf{1}_{\{s, W\}}$ est une fonction indicatrice qui est égale à 1 si W n'a pas croisé la frontière avant s . $b(t)$ est toutefois difficilement calculable dans la plupart des cas, mais (Durbin et Williams, 1992) donnent une forme calculable de $p(t)$ dans le cas du mouvement brownien :

$$p(t) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} q_j(t) + (-1)^k r_k(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

où

$$q_j(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{j-2}} \left[\frac{a(t_{j-1})}{t_{j-1}} - a'(t_{j-1}) \right] \prod_{i=1}^{j-1} \left[\frac{a(t_{i-1}) - a(t_i)}{t_{i-1} - t_i} - a'(t_{i-1}) \right] f(t_{j-1}, \dots, t_1, t) dt_{j-1} \dots dt_1 \quad (t_0 = t) \quad (4.5)$$

et

$$r_k(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} b(t_k) \prod_{i=1}^k \left[\frac{a(t_{i-1}) - a(t_i)}{t_{i-1} - t_i} - a'(t_{i-1}) \right] \times f(t_k, \dots, t_1, t) dt_k \dots dt_1 \quad (t_0 = t). \quad (4.6)$$

Notons que le terme $r_k(t)$ est difficilement calculable, car il dépend de $b(t_k)$. Par contre, (Durbin et Williams, 1992) montrent que le terme $r_k(t)$ est inférieur au terme $q_{k+1}(t)$ lorsque la frontière est concave sur tout le domaine. Lorsque la frontière est convexe sur tout le domaine, l'erreur maximale est plutôt

$$|r_k(t)| \leq \gamma(t)^k 2^{-(k-1)/2} \pi^{1/2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}k\right) \right]^{-1} t^{(k-1)/2}. \quad (4.7)$$

Dans les deux cas, le terme $r_k(t)$ est donc négligeable. On approxime alors $p(t)$ par

$$p_k(t) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} q_j(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

On verra plus tard que cette série converge très rapidement.

Pour évaluer (4.5), la méthode d'intégration Monte Carlo a été utilisée. Pour ce qui est de la densité conjointe, on peut utiliser la propriété de Markov,

$$f(t_{k-1}, \dots, t_1, t) = \prod_{i=1}^{k-1} f(t_i | t_{i-1}) f(t) \quad (t_0 = t), \quad (4.9)$$

où

$$f(t_i|t_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_i(1 - t_i/t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(a(t_i) - a(t_{i-1})t_i/t_{i-1})^2}{2t_i(1 - t_i/t_{i-1})}\right), \quad (4.10)$$

car $t_{i-1} > t_i$. Il est à noter, qu'il y a une coquille dans l'article de (Durbin et Williams, 1992). En effet, le terme $f(t)$ de l'équation (4.9) est manquant.

Voyons un exemple pour démontrer la rapidité de la convergence de la série. On regarde la densité du premier temps de passage d'un mouvement brownien standard à la frontière $a(t) = t + 1$ évalué à l'instant $t = 1$. On connaît la valeur exacte de cette densité avec l'équation (2.4) où l'on pose $x_0 = t_0 = 0$. On va estimer cette valeur avec l'algorithme de Durbin pour certaines valeurs de k entre 1 et 100. Notons que l'on prend 1000 itérations pour évaluer les intégrales multiples (4.5) par Monte Carlo.

Tableau 4.1 Densité du premier temps de passage à la barrière $t + 1$ évaluée à $t = 1$

Vraie valeur ($p(1)$)	0.053990966513188	
k	$p_k(1)$	$ p(1) - p_k(1) , \times 10^{-11}$
1	0.053990966505641	0.754674794878340
2	0.053990966513106	0.008251732630526
3	0.053990966513140	0.004809347364798
4	0.053990966513107	0.008151118668920
5	0.053990966513113	0.007554373793184
10	0.053990966512662	0.052618326362719
20	0.053990966513206	0.001791622405989
50	0.053990966513090	0.009855311011719
100	0.053990966513142	0.004583833312921

Le tableau 4.1 montre qu'après seulement une itération 10 bonnes décimales ont été obtenues. Après une autre itération, on obtient deux autres bonnes décimales. Ensuite, le gain semble négligeable. Donc, pour la suite, $k = 2$ sera utilisé. Dans la prochaine section, nous allons comparer les deux méthodes.

4.3 Comparaison des méthodes

Comme exemple de comparaison, nous allons regarder la densité du premier temps de passage à la barrière $11(1.02)^t$ d'un mouvement brownien standard débutant à $t_0 = 0$ et $x_0 = 10$. Ce qui revient au même que de regarder la densité du premier temps de passage

à la frontière $1100(1.02)^t$ d'un mouvement brownien avec volatilité $\sigma = 100$ débutant à $t_0 = 0$ et $x_0 = 1000$. Cette frontière représente alors le montant total d'un placement de 1100\$ à un intérêt de 2%. Cet exemple est intéressant lorsqu'on se demande si on devrait placer notre argent à risque ou non.

Pour l'algorithme DNPR, un pas de discrétisation de 10^{-3} a été utilisé. Ce dernier a convergé en 821.89 secondes.

Pour l'algorithme de Durbin, un pas de discrétisation de 10^{-3} a aussi été utilisé. De plus, 1000 itérations ont été effectuées pour estimer les intégrales (4.5) par Monte Carlo. L'algorithme a convergé en 229.21 secondes, il est donc au moins 3.5 fois plus rapide que celui de DNPR.

Tableau 4.2 Densité du premier temps de passage à la barrière $11(1.02)^t$

t	$\tilde{g}(t)$ (DNPR)	bornes de l'erreur pour DNPR	$p(t)$ (Durbin)	bornes de l'erreur pour Durbin
0.2	0.292912566715552	2.6288×10^{-5}	0.292938862707296	2.6298×10^{-12}
0.4	0.359502258825788	3.5192×10^{-5}	0.359540189233436	3.7504×10^{-12}
0.6	0.295188993776138	2.8437×10^{-5}	0.295224065456903	4.6277×10^{-12}
0.8	0.234797575683002	2.1671×10^{-5}	0.234819445975382	5.3853×10^{-12}
1.0	0.189272086474555	1.8642×10^{-5}	0.189270558163733	6.0706×10^{-12}
1.5	0.119893600704894	1.3240×10^{-5}	0.119830560314722	7.5803×10^{-12}
2.0	0.083321307228794	1.5391×10^{-5}	0.083177705604467	8.9309×10^{-12}
2.5	0.061661071233042	1.7220×10^{-5}	0.061451630936828	1.0183×10^{-11}
3.0	0.047682500258086	1.8851×10^{-5}	0.047368827595750	1.1381×10^{-11}
4.0	0.031158118218828	2.1633×10^{-5}	0.030668536640198	1.3673×10^{-11}
5.0	0.022008707321616	2.3972×10^{-5}	0.021349123352643	7.9466×10^{-11}

À la vue du tableau 4.2, on remarque que l'algorithme de Durbin est beaucoup plus précis. Par contre, l'algorithme de Durbin se complexifie beaucoup lorsqu'on cesse d'être en présence d'un mouvement brownien tandis que la méthode DNPR est tout aussi simple pour tout processus gaussien et markovien.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, la méthode DNPR a été étudiée en profondeur.

Premièrement, les détails de plusieurs preuves de (Di Nardo et al., 2001) ont été faits. Les cas du mouvement brownien et du processus d'Ornstein-Uhlenbeck ont été traités en exemple pour une frontière de la forme $S(t) = m(t) + d_1 h_1(t) + d_2 h_2(t)$. Ensuite, une méthode basée sur des propriétés de symétrie qui permet de résoudre la question pour les barrières du type $S(t, t_0) = u(t) - \frac{h_1(t)h_2(t_0) - h_1(t_0)h_2(t)}{2[u(t_0) - y(t_0)]} \ln(c)$, $c > 0$ a été vu.

Deuxièmement, deux exemples où le théorème des propriétés de symétrie peut être utilisé ont été étudiés, soit pour calculer la valeur d'une option à barrière et en gestion de portefeuille.

Finalement, l'efficacité des algorithmes de DNPR et de Durbin ont été comparées.

La méthode DNPR permet de calculer explicitement la densité du premier temps de passage pour certains cas qui n'avaient pas été résolus. Par exemple, (Daniels, 1996) avait proposé une méthode pour le mouvement brownien et un ensemble de frontières. Ici, DNPR proposent une formule explicite pour les processus gaussiens et markoviens et un ensemble de frontières qui généralise celles de Daniels. Il serait intéressant de regarder si cette méthode peut se généraliser pour toute frontière.

APPENDICE A

PROGRAMME MATLAB

Voici les commandes utilisées dans MatLab 7.10.0 pour générer les résultats du chapitre 4.

A.1 Méthode DNPR

D'abord, voyons l'algorithme pour la méthode DNPR.

Pour commencer, on définit les 3 termes qui définissent un processus gaussien et markovien dans l'article de (Di Nardo et al., 2001), $h_1(t)$, $h_2(t)$ et $m(t)$. Ici, les simulations sont effectuées pour un mouvement brownien avec $\mu = 0$ et $\sigma = 100$.

```
function [b] = h1(t)
```

```
b=t;
```

```
end
```

```
function [b] = h2(t)
```

```
b=ones(1,length(t))*10000;
```

```
end
```

```
function [b] = m(t)
```

```
b=zeros(1,length(t));
```

```
end
```

Ensuite, on définit la barrière à atteindre $S(t)$.

```
function [b] = S(t)
r=0.02;
obj=1100;
b=obj*(1+r)^t;
end
```

Puis, on définit les densités de transition $f(x, t|x_0, t_0)$, $f(S(t), t|S(\tau), \tau)$ et les fonctions $\Psi(x, t|x_0, t_0)$ et $\Psi(S(t), t|S(\tau), \tau)$.

```
function [b] = f(t,x0,t0)
E=m(t)+(h2(t)/h2(t0))*(x0-m(t0));
var=h2(t)*(h1(t)-h2(t)*h1(t0)/h2(t0));
b=(1/sqrt(2*pi*var))*exp(-(1/2)*(S(t)-E)^2/(var));
end
```

```
function [b] = ftau(t,tau)
E=m(t)+(h2(t)/h2(tau))*(S(tau)-m(tau));
var=h2(t)*(h1(t)-h2(t)*h1(tau)/h2(tau));
b=(1/sqrt(2*pi*var))*exp(-(1/2)*(S(t)-E)^2/(var));
end
```

```
function [b] = Psi(t,x0,t0)
b=(1100*(1.02^t)*log(1.02)+(-S(t)+x0)/(t-t0))*f(t,x0,t0)/2;
end
```

```
function [b] = Psitau(t,tau)
b=(1100*(1.02^t)*log(1.02)+(-S(t)+S(tau))/(t-tau))*ftau(t,tau)/2;
end
```

Maintenant que toutes les fonctions nécessaires sont bien définies, on peut faire les simulations.

```
tic

p=0.001; % pas de discrétisation
T=5; % temps final
t=[p:p:T];
x0=1000;
t0=0;
N=T/p;
k=1:1:N;

w=zeros(N,N-1);

%%%% w

for k=2:N
for j=1:(k-1)

if((mod(k,2)==0) && (mod(j,2)==1))
w(k,j)=4/3;

elseif((mod(k,2)==0) && (mod(j,2)==0))
w(k,j)=2/3;

elseif((mod(k,2)==1) && (mod(j,2)==1) && (j<=k-4))
w(k,j)=4/3;
```

```
elseif((mod(k,2)==1) && (mod(j,2)==0) && (j<=k-4))
```

```
w(k,j)=2/3;
```

```
elseif((mod(k,2)==1) && (j==k-3))
```

```
w(k,j)=17/24;
```

```
elseif((mod(k,2)==1) && (j==k-2))
```

```
w(k,j)=9/8;
```

```
elseif((mod(k,2)==1) && (j==k-1))
```

```
w(k,j)=9/8;
```

```
else
```

```
w(k,j)=0;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
g=zeros(1,length(t));
```

```
g(1)=-2*Psi(t(1),x0,t0);
```

```
for k=2:N
```

```
s=0;
```

```
for j=1:(k-1)
```

```
s=s+ w(k,j)*g(j)*Psitau(t0+k*p,t0+j*p);
```

```
end
```

```
g(k)=-2*Psi(t0+k*p,x0,t0)+2*p*s;
```

```
end
```

```
toc
```

Calcul de la borne maximale.

```
M=0;
```

```
for j=1:N
```

```
for k=(j+1):N
```

```
temp=abs(Psitau(t0+k*p,t0+j*p));
```

```
if (temp>M)
```

```
M=temp;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
tau1=0;
```

```
tau2=0;
```

```
sup=0;
```

58

```
k=5000; %% à faire varier
```

```
for i=1:100000
```

```
tau1=k*p*rand(1);
```

```
tau2=tau1+rand(1)*2*p/3;
```

```
if (tau2<(k*p))
```

```
y=abs(g(ceil(tau1/p))*Psitau(k*p,tau1)-g(ceil(tau2/p))*Psitau(k*p,tau2));
```

```
if (y>sup)
```

```
sup=y;
```

```
end
```

```
end
```

```
i=i+1;
```

```
end
```

```
%% Borne maximale :
```

```
del=2*N*p*exp(8*M*k*p/3)*sup
```


A.2 Méthode de Durbin

Création de la fonction pour la borne à atteindre.

```
function [ a ] = a(t)
r=0.02;
obj=11;
a=obj*(1+r)^t-10;
end
```

Définition des fonctions $f(b|c)$ et $f(t)$

```
function [ fs ] = fs(b,c)
fs=(2*pi*b*(1-b/c))^(1/2)*exp(-.5*(a(b)-a(c)*b/c)^2/(b*(1-b/c)));
end
```

```
function [ f ] = f(t)
n=length(t);

g=(2*pi*t(n))^(1/2)*exp(-.5*(a(t(n)))^2);

f=fs(t(1),t(n))*g;

if n>=3
for i=2:(n-1)
    f=f*fs(t(i),t(i-1));
end
end
if n==1
    f=(2*pi*t)^(1/2)*exp(-(.5*(a(t))^2)/t);
```

60

end

end

Définition de $q_j(t)$.

```
function [int] = q1(t,n)
h=0.000001;
ap=(a(t+h)-a(t-h))/(2*h);
int=(a(t)/t-ap)*f(t);
end
```

```
function [int] = q2(t,n)
h=0.000001;
ap0=(a(t+h)-a(t-h))/(2*h);
for i=1:n
```

```
    s(1)=t*rand;
    ap(1)=(a(s(1)+h)-max(a(s(1)-h),0))/(2*h);
```

```
    q=(a(s(1))/s(1)-ap(1));
    p=((a(t)-a(s(1)))/(t-s(1))-ap0);
```

```
    tot(i)=q*p*f([s,t]);
    %*t^2/2
```

end

```
int=sum(tot)*t/n;
```

end

```
function [int] = qj(t,j,n)
```

```

h=.000001;
ap0=(a(t+h)-a(t-h))/(2*h);
s=zeros(1,j-1);
ap=zeros(1,j-1);
w=zeros(1,n);
for i=1:n

    s(1)=t*rand;

    if (j>=3)
        for k=2:(j-1)
            s(k)=s(k-1)*rand;
        end
    end
    h=min(s(j-1),.00001);
    ap(1)=(a(s(1)+h)-a(s(1)-h))/(2*h);
    for k=2:(j-1)
        ap(k)=(a(s(k)+h)-a(s(k)-h))/(2*h);
    end

    q(i)=(a(s(j-1))/s(j-1)-ap(j-1));
    p=((a(t)-a(s(1)))/(t-s(1))-ap0);
    for l=2:(j-1)
        p=p*((a(s(l-1))-a(s(1)))/(s(l-1)-s(1))-ap(l-1));
    end

    tot(i)=q(i)*p*f([s,t]);

```

62

end

```
int(1)=sum(tot)*t^(j-1)/(factorial(j-1)*n);
```

end

Définition de $p_k(t)$.

```
function [p] = pk(t,k,n)
```

```
if k==1
```

```
    p=q1(t,n);
```

```
elseif k==2
```

```
    p=q1(t,n)-q2(t,n);
```

```
else
```

```
    p=q1(t,n)-q2(t,n);
```

```
    for i=3:k
```

```
        p=p+ ((-1)^(i-1))*qj(t,i,n);
```

```
    end
```

```
end
```

```
end
```

BIBLIOGRAPHIE

- Atkinson, K. E. 1989. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley and Sons.
- Berger, E. 1996. *The Handbook of Exotic Options*, chapitre 8. IRWIN.
- Daniels, H. 1996. « Approximating the first crossing-time density for a curved boundary », *Bernoulli*, vol. 2, p. 133–143.
- Di Nardo, E., A. Nobile, E. Pirozzi, et L. Ricciardi. 2001. « A computational approach to first-passage-time problems for gauss-markov processes », *Adv. Appl. Prob.*, vol. 33, p. 453–482.
- Durbin, J. 1985. « The first-passage density of a continuous gaussian process to a general boundary », *Journal of Applied Probability*, vol. 22, p. 99–122.
- Durbin, J. et D. Williams. 1992. « The first-passage density of the brownian motion process to a curved boundary », *Journal of Applied Probability*, vol. 29, p. 297–304.
- Fortet, R. 1943. « Les fonctions aléatoires du type markoff associées à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique », *J. Math Pures Appl.*, vol. 9, no. 22.
- Salminen, P. et A. Borodin. 2002. *Handbook of Brownian Motion : Facts and Formulae*. Birkhauser.
- Yan, J. et X. Zhou. 2009. « Markowitz strategies revised », *Acta mathematica scientia*, vol. 29, p. 817–828.